Радиационные поправки к сечению электрон-протонного рассеяния в экспериментах по изучению вклада двухфотонного обмена и измерению зарядового радиуса протона

(по материалам кандидатской диссертации)

Герасимов Р. Е.

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

Объединенный семинар ОФВЭ и ОТФ НИЦ КИ - ПИЯФ
27 августа 2020 г.

Мотивация

- Упругое рассеяние электронов на протонах — важнейший инструмент исследования внутренней структуры протона
- Данные измерений неполяризованных дифференциальных сечений упругого рассеяния оказываются в противоречии с измерениями альтернативными методами для
  - поведения электромагнитных формфакторов протона $G_{E,M}(Q^2)$
  - зарядового радиуса протона r_E
- Выполнены/предложены новые прецизионные эксперименты для разрешения существующих противоречий
- Анализ экспериментов, связанных с измерением дифференциальных сечений упругого рассеяния, требует аккуратного учета радиационных поправок

Публикации по теме диссертации

Доклад основан на работах

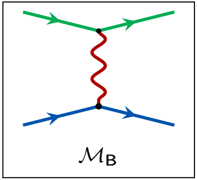
1. Герасимов, Р. Е. и Фадин, В. С. Анализ приближений, используемых при вычислении радиационных поправок к сечению электрон-протонного рассеяния // Ядерная физика. - 2015. - т. 78, № 1/2. - С. 73–96.
2. Gerasimov, R. E. and Fadin, V. S. Contribution of $\Delta(1232)$ to real photon radiative corrections for elastic electron-proton scattering // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. - 2016. - V. 43, I. 12. - P.:125003.
3. Fadin, V. S. and Gerasimov, R. E. On the cancellation of radiative corrections to the cross section of electron-proton scattering // Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. - 2019. - V. 795. - P. 172–176.
4. Gerasimov R. E. Approximations used in calculations of radiative corrections to electron-proton scattering cross section // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of the Twenty first Annual Seminar,
NPCS'2014, Minsk, 20-23 May 2014. - 2014. - V. 20. - P. 56-63.

Электрон-протонное рассеяние в борновском приближении

- Формфакторы Сакса $F_{1,2}$

$$\Gamma^\mu(q) = F_1(Q^2)\,\gamma^\mu - F_2(Q^2)\,\frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,q_\nu}{4M}$$

q — передача 4-импульса протону, $Q^2 = -q^2$,
M — масса протона



- Формула Розенблюта

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{Mott}}}{\mathrm{d}\Omega}\,\frac{\tau\,G_M^2 + \epsilon\,G_E^2}{\epsilon(1+\tau)},$$

где электрический и магнитный формфакторы протона $G_{E,M}$

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \tau\,F_2(Q^2), \qquad G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2),$$

и введены величины

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2}, \qquad \epsilon^{-1} = 1 + 2(1+\tau)\tan^2\frac{\theta}{2}\,,$$

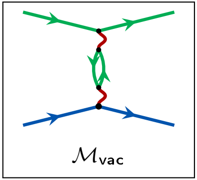
θ — угол рассеяния электронов, $\frac{d\sigma_{\mathrm{Mott}}}{d\Omega}$ — моттовское сечение

Расчеты радиационных поправок с использованием мягкофотонного приближения

- необходимы для обработки экспериментов по измерению дифференциального по углу рассеяния электрона сечения упругого электрон-протонного рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (эксперименты с магнитным спектрометром по розенблютовскому разделению формфакторов протона)
- дают поправку к дифференциальному сечению в первом порядке по электромагнитной константе связи α

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (1+\delta)\frac{d\sigma_B}{d\Omega}$$

- впервые получены в постановке эксперимента с измерением угла рассеяния и энергии конечного электрона в работе (Tsai, 1961). Процедура Мо и Тсая (Mo, 1968) традиционно использовалась при обработке данных экспериментов вплоть до сравнительно недавних
- Улучшением результатов Мо и Тсая предполагался более современный расчет радиационных поправок, выполненный Максимоном и Тьеном (Maximon, 2000)



- радиационная поправка $\delta \propto \alpha^1$ и вычисляется как сумма "виртуальной" и "реальной" части

$$\delta = \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{real}} \ .$$

- "Виртуальная" часть поправки

$$\delta_{\text{virt}} = \delta_{\text{vac}} + \delta^{e}_{\text{vertex}} + \delta^{p}_{\text{vertex}} + \delta_{2\gamma}.$$

- δ_{vac} выражается через поляризационный оператор:

$$\delta_{\text{vac}} = 2\mathcal{P}(Q^2),$$

в котором выделяют лептонные и адронный вклады:

$$\mathcal{P}(Q^2) = \mathcal{P}_e(Q^2) + \mathcal{P}_\mu(Q^2) + \mathcal{P}_\tau(Q^2) + \mathcal{P}_h(Q^2).$$

- Электронный вклад при $Q^2 \gg m^2$, m — масса электрона,

$$\mathcal{P}_e(Q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) - \frac{5}{3}\right).$$

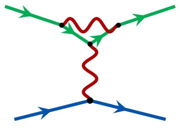
- В (Mo, 1968) учтен только электронный вклад. Впоследствии при обработке экспериментов (и в (Maximon, 2000)) учитывались и остальные вклады.

Поправка к электронной вершине

- $\delta^e_{\mathrm{vertex}}$ в пределе $Q^2 \gg m^2$

$$\delta^e_{\mathrm{vertex}} = -\frac{\alpha}{\pi}\left(K(l,l') - K(l,l) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) + 2\right),$$

l, l' — 4-импульсы начального и конечного электронов



- $K(p_i, p_j)$ — значение треугольного скалярного однопетлевого интеграла

$$K(p_i, p_j) = (p_i \cdot p_j)\int_0^1 \frac{dx}{p_x^2}\ln\left(\frac{p_x^2}{\lambda^2}\right),$$

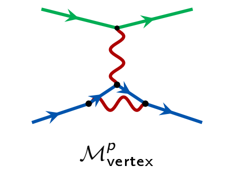
где $p_x = xp_i + (1-x)p_j$, λ — масса фотона, регуляризующая инфракрасную расходимость.

- Значения $K(l,l')$, $K(l,l)$:

$$K(l,l') = \ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right)\ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) - \frac{\pi^2}{6}, \qquad K(l,l) = \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)$$

Поправка к протонной вершине

- δ^p_{vertex} не может быть вычислена из первых принципов
- рассматривается в одночастичном приближении, когда учтены только протонные виртуальные состояния и вершины взаимодействия фотонов с протонами взяты на массовой поверхности.



- (Mo, 1968) — стандартное мягкофотонное приближение

$$\delta^p_{\text{vertex}} = -\frac{Z^2\alpha}{\pi}\left(K(p,p') - K(p,p)\right),$$

p, p' — 4-импульсы начального и конечного протона, Z — заряд протона в единицах абсолютного значения заряда электрона $|e|$ $(Z = 1)$

- (Maximon, 2000) — петлевое интегрирование с формфакторами протона с монопольной и дипольной зависимостью от передачи импульса: $\delta^{p,\text{MTj}}_{\text{vertex}} = \delta^p_{\text{vertex}} + \delta^{(1)}_{\text{virt}}$, $\delta^{(1)}_{\text{virt}} < 0.012$, при $Q^2 < 16\ (\text{GeV}/c)^2$

- $\delta_{2\gamma} = \delta_{\mathrm{box}} + \delta_{\mathrm{xbox}}$ представляет наибольшие сложности
- разные варианты мягкофотонного приближения: основной вклад происходит от областей, в которых один из двух обменных фотонов мягкий
- стандартное мягкофотонное приближение

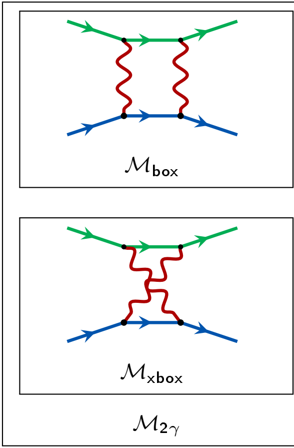
$$\mathcal{M}_{\mathrm{box}}^{\mathrm{soft}} = -\frac{Z\alpha}{2\pi}\,\left(K(l,-p) + K(l',-p')\right)\;\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$$

- дополнительно (Mo, 1968)

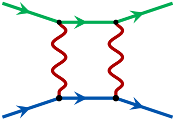
$$\mathrm{Re}\left[\mathcal{M}_{\mathrm{box}}^{\mathrm{MoT}}\right] \approx -\frac{Z\alpha}{2\pi}\,\left(K(l,p) + K(l',p')\right)\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$$

- на самом деле

$$\mathrm{Re}\left(K(l,-p)\right) - K(l,p) = -\frac{\pi^2}{2} + \int_{1-\frac{M^2}{s-M^2}}^{1+\frac{M^2}{s-M^2}} \mathrm{d}\xi\;\frac{\ln|1-\xi|}{\xi},$$



- (Mo, 1968)



$\mathcal{M}_{\mathrm{box}}$

$$\delta_{\mathrm{box}}^{\mathrm{MoT}} = -\frac{Z\alpha}{\pi}\left(K(l,p) + K(l',p')\right)$$

где

$$K(l,p) = K(l',p') = \frac{1}{2}\ln\frac{4E^2}{m^2}\ln\frac{mM}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{s-M^2}{m^2}\ln\frac{s-M^2}{M^2} - \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{M^2}{s-M^2}\right),$$

в котором $s = (l+p)^2$

- (Maximon, 2000)

$$\delta_{\mathrm{box}}^{\mathrm{MTj}} = -\frac{Z\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{4E^2}{m^2}\right)\ln\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}\right),$$

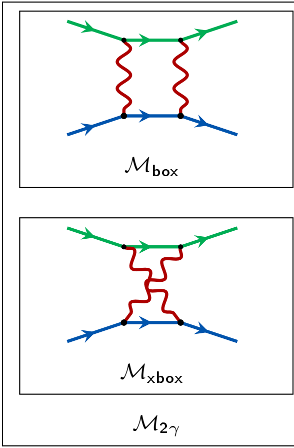
или в виде петлевого интеграла

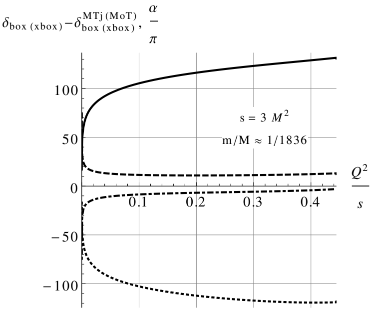
$$\delta_{\mathrm{box}}^{\mathrm{MTj}} = -\frac{Z\alpha}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int\frac{d^4k}{i\pi^2}\frac{2(l\cdot p)\,q^2}{(k^2-\lambda^2)((l-k)^2-m^2)((p+k)^2-M^2)((q-k)^2-\lambda^2)}$$

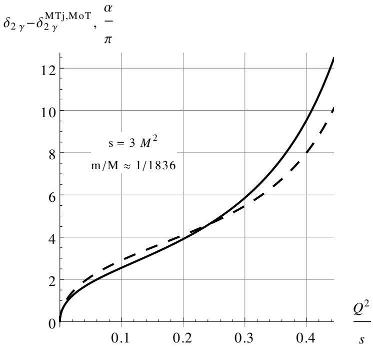
Амплитуда двухфотонного обмена. III

Недостатки подходов к учету вкладов отдельных диаграмм и компенсация в окончательных выражениях

- (Mo, 1968)
  - замена в box-амплитуде $K(l,-p) \to K(l,p)$ отбрасывает члены типа π^2, которые исходно присутствуют в членах типа $ln^2(-s)$
  - но в точном ответе при больших энергиях (в реджевской области) этих квадратов логарифмов заведомо не должно быть
  - физически смысл имеет сумма $\delta_{box} + \delta_{xbox}$, в которой в реджевской области квадраты логарифмов сокращаются
- (Maximon, 2000)
  - присутствуют лишние дваждылогарифмические сингулярности по массе фермионов: в петлевой интеграл дает вклад область мягких фермионов, которая подавлена в реальном матричном элементе
  - опять же физически смысл имеет сумма $\delta_{box} + \delta_{xbox}$, в которой лишние дваждылогарифмические вклады сокращаются

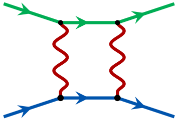


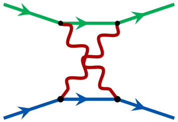

$\delta_{\text{box (xbox)}} - \delta^{\text{MTj (MoT)}}_{\text{box (xbox)}}, \frac{\alpha}{\pi}$
s = 3 M^2
m/M ≈ 1/1836
$\frac{Q^2}{s}$
100
50
0
−50
−100
0.1
0.2
0.3
0.4


$\delta_{2\gamma} - \delta^{\text{MTj,MoT}}_{2\gamma}, \frac{\alpha}{\pi}$
s = 3 M^2
m/M ≈ 1/1836
$\frac{Q^2}{s}$
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4

В модели бесструктурного протона

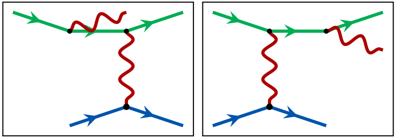
- применимость приближения Мо и Тсая к вычислению по отдельности $\delta_{(\mathrm{x})\mathrm{box}}$ нарушается только в реджевской области
- применимость приближения Максимона и Тьена к вычислению по отдельности $\delta_{(\mathrm{x})\mathrm{box}}$ нарушается уже при $Q^2 \gg m^2$
- физический интерес представляет сумма вкладов, в которой члены, явно нарушающие применимость приближений сокращаются
- качественно ни один из двух вариантов не выглядит предпочтительным, количественно приближение Мо и Тсая может быть и ближе к точному результату для бесструктурных частиц


$\mathcal{M}_{\mathrm{box}}$

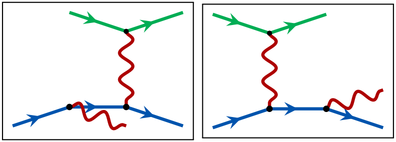

$\mathcal{M}_{\mathrm{xbox}}$

$\mathcal{M}_{2\gamma}$

Реальные радиационные поправки



$\mathcal{M}^{e}_{\text{brem}}$



$\mathcal{M}^{p}_{\text{brem}}$

- расчет “реальной” части радиационных поправок основан на мягкофотонном приближении для амплитуд тормозного излучения

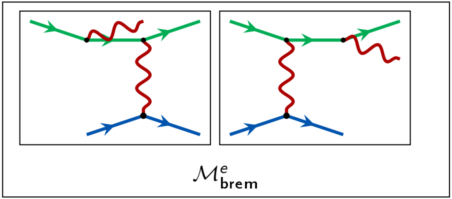
$$\mathcal{M}^{e}_{\text{brem, soft}} + \mathcal{M}^{p}_{\text{brem, soft}} = e\, j_\mu(k)\varepsilon^{*\mu}(k)\ \mathcal{M}_B,$$

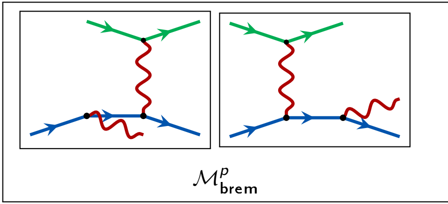
где

$$j_\mu(k) = \frac{l'_\mu}{(k\cdot l')} - \frac{l_\mu}{(k\cdot l)} - Z\,\frac{p'_\mu}{(k\cdot p')} + Z\,\frac{p_\mu}{(k\cdot p)},$$

а $k^\mu = \{\omega = \sqrt{\mathrm{k}^2+\lambda^2},\ \mathrm{k}\}$ и $\varepsilon^{*\mu}(k)$ — 4-векторы импульса и поляризации фотона.

Реальные радиационные поправки





- В итоге, получаем в постановке эксперимента с магнитным спектрометром

$$\delta_{\text{real}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\lambda}^{\eta\,\Delta E} |\mathrm{k}'|\, d\omega' \int \frac{d\Omega'_\gamma}{4\pi} \left(-j^2(k)\right).$$

где интегрирование удобно проводить в системе отсчета $\mathrm{l} + \mathrm{p} - \mathrm{l}' = 0$, $\eta = E/E'$ — отношение энергий электронов в упругом процессе, ΔE — ограничение, накладываемое на отбор упругих событий. Это выражение совпадает с (Maximon, 2000)

- Оказывается, что результат (Mo, 1968) представляется в виде

$$\delta^{MoT}_{\text{real}} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\lambda}^{\eta\,\Delta E} \omega'\, d\omega' \int \frac{d\Omega'_\gamma}{4\pi} \left(-j^2(k)\right).$$

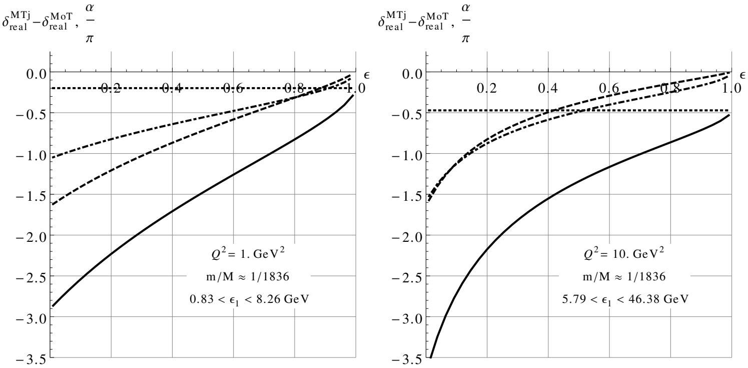
Реальные радиационные поправки

- разница $\delta_{\text{real}} - \delta_{\text{real}}^{\text{MoT}}$

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{real}} - \delta_{\text{real}}^{\text{MoT}} \quad = \quad & \frac{\alpha}{\pi}\left\{\left[Li_2\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \frac{\pi^2}{6}\right] - \right. \\
& -2Z\left[\ln\eta\ \ln x - Li_2\left(1-\frac{\eta}{x}\right) + Li_2\left(1-\frac{1}{\eta x}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\ Li_2\left(1-\eta\frac{2E_p'}{M}\right) - \frac{1}{2}\ Li_2\left(1-\frac{2E_p'}{\eta M}\right)\right] \\
& +Z^2\left[\frac{E_p'}{|\mathrm{p}'|}\left(\ln x - Li_2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + Li_2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi^2}{12}\right) - \right. \\
& \left.\left. - \ln\left(\frac{4E_p'}{M}\right) + 1\right]\right\},
\end{aligned}$$

где $x = \left(E_p' + |\mathrm{p}'|\right)/M$, а энергия протона $E_p' = M + Q^2/(2M)$, т. е. E_p' и x зависят только от передачи q^2.

Реальные радиационные поправки

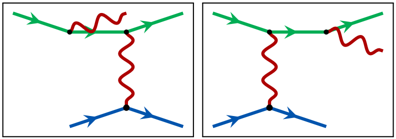


Результаты I

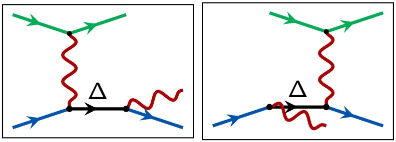
- Выполнено сравнение между собой традиционного (Mo, 1969) и более современного (Maximon, 2000) расчетов радиационных поправок к сечению упругого электрон-протонного рассеяния основанных на мягкофотонном приближении
- В модели бесструктурного протона проанализированы точные и приближенные выражения для амплитуды двухфотонного обмена. Обнаружено, что явные недостатки подходов при применении их к отдельных диаграммам компенсируются в полных выражениях для вклада в виртуальные радиационные поправки. Сделан вывод о том, что нельзя отдать предпочтение тому или иному расчету
- В вычислениях радиационных поправок, связанных с излучением реального фотона, установлена неточность традиционной процедуры

Учет радиационных поправок при изучении эффектов двухфотонного обмена

- проведено три эксперимента (ИЯФ, JLab, DESY), в которых изучались эффекты двухфотонного обмена (ДФО), по измерению отношения сечений $R = \sigma(e^+p)/\sigma(e^-p)$.
$$R \approx 1 - 2\delta_{2\gamma} - 2\delta_{brem,odd},$$
виртуальные радиационные поправки $\delta_{2\gamma}$ возникают от интерференции амплитуды ДФО с борновской; а C-нечетные реальные радиационные поправки — от интерференции амплитуд тормозного излучения лептоном и протоном
- поправки содержат инфракрасные расходимости, которые сокращаются в их сумме. Традиционно используется процедура Мо-Тсая (Mo, 1968) для выделения и сокращения инфракраснорасходящихся вкладов
$$\delta_{2\gamma} = \delta_{2\gamma}^{soft} + \delta_{2\gamma}^{hard}, \qquad \delta_{brem,odd} = \delta_{brem,odd}^{soft} + \delta_{brem,odd}^{hard}.$$
- чтобы извлечь из эксперимента “жесткий” вклад ДФО $\delta_{2\gamma}^{hard}$ необходимо учесть “жесткую” часть реальных радиационных поправок. Последняя сильно зависит от конкретных экспериментальных условий $\delta_{brem,odd}^{hard}$. Для эксперимента ИЯФ на накопителе ВЭПП-3 был написан генератор событий ESEPP (Gramolin, 2014).



$\mathcal{M}^{e}_{\text{brem}}$



$\mathcal{M}^{\Delta}_{\text{brem}}$

- Можно было бы ожидать, что $\Delta(1232)$ даст заметный вклад в радиационные поправки, так как это ближайший резонанс, и он имеет существенный бранчинг распада $\Delta \to p\gamma$
- Вклад этих амплитуд может быть вычислен для определенной параметризации переходной вершины $\gamma\Delta p$.
- Вклад оказывается малым, далее представим оценки и численные результаты

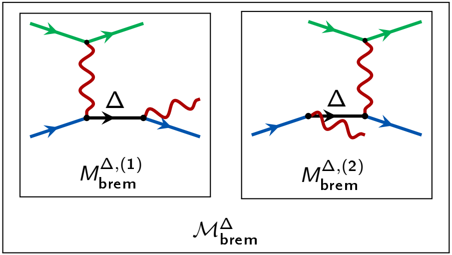
Переходные формфакторы $\gamma p \Delta$

- введение переходных магнитного $G_M^*(q^2)$, электрического $G_E^*(q^2)$ и кулоновского $G_C^*(q^2)$ формфакторов (Jones, 1972):

$$\Gamma^{\nu\beta}_{\gamma p\to\Delta}(p_\Delta, q) = -i\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{3(M_\Delta + M)}{2M_p\left[(M_\Delta+M)^2 - q^2\right]}\left\{ G_M^*(q^2)\;\epsilon^{\nu\beta\rho\sigma}(p_\Delta)_\rho q_\sigma \right.$$
$$+\,G_E^*(q^2)\left[\frac{4\,\epsilon^{\nu\tau\rho\sigma}(p_\Delta)_\rho q_\sigma\, g_{\tau\tau'}\,\epsilon^{\beta\tau'\lambda\kappa}(p_\Delta)_\lambda q_\kappa}{(M_\Delta - M)^2 - q^2}\,(i\gamma^5) - \epsilon^{\nu\beta\rho\sigma}(p_\Delta)_\rho q_\sigma\right]$$
$$\left. +\,G_C^*(q^2)\,\frac{2\left(q^2\,p_\Delta^\nu - (q\cdot p_\Delta)\,q^\nu\right)q^\beta}{(M_\Delta - M)^2 - q^2}\,(i\gamma^5)\right\},$$

- ниже в численных рассчетах параметризация формфакторов из (Zhou, 2014)

Вклад $|M_{\text{brem}}^{\Delta}|^2$. Оценка



- очень грубая оценка вклада $\left|M_{\text{brem}}^{\Delta,(1)}\right|^2$

$$\delta_\Delta \sim \frac{d\sigma_{ep\to e\Delta}/d\Omega}{d\sigma_{ep\to ep}/d\Omega} \times \frac{\Gamma_{\Delta\to p\gamma}}{\Gamma_\Delta}.$$

которая дает δ_Δ порядка 0.5% в условиях эксперимента на накопителе ВЭПП-3, что не мало.

- пропагатор $\Delta(1232)$

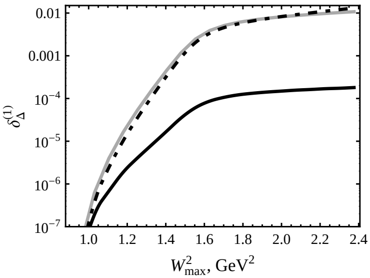
$$\frac{i(\hat{p}_\Delta + M_\Delta)}{p_\Delta^2 - M_\Delta + i\Gamma_\Delta M_\Delta}\left(g^{\alpha\beta} - \frac{\gamma^\alpha\gamma^\beta}{3} - \frac{\hat{p}_\Delta\gamma^\alpha p_\Delta^\beta + p_\Delta^\alpha\gamma^\beta\hat{p}_\Delta}{3p_\Delta^2}\right)$$

- в специальной системе отсчета $\mathrm{l} + \mathrm{p} - \mathrm{l}' = 0$ переходная вершина $\Delta \to \gamma p$ содержит первую степень $\omega = (W^2 - M^2)/(2W)$, где $W^2 = (l + p - l')^2$
- в итоге, более аккуратная оценка вклада $|M_\Delta^{(1)}|^2$ дает:

$$\delta_\Delta^{(1)} \approx \frac{d\sigma_{ep\to e\Delta}/d\Omega}{d\sigma_{ep\to ep}/d\Omega} \times \frac{\Gamma_{\Delta\to\gamma p}}{\Gamma_\Delta} \times \frac{1}{\pi}\int_0^{x_{\rm max}} \frac{\Gamma_\Delta M_\Delta}{(x - M_\Delta^2 + M)^2 + \Gamma_\Delta^2 M_\Delta^2}\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(M_\Delta^2 - M^2)^3},$$

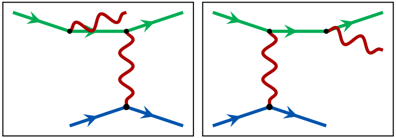
где $x = W^2 - M^2$, $x_{\rm max} = W_{\rm max}^2 - M^2$ — максимально допустимое значение при установке, при установке ограничений на энергию рассеянного электрона.

Вклад $|M^{\Delta}_{\text{brem}}|^2$. Численные результаты

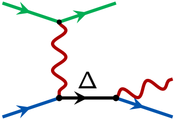


.

Интерференция $M^{e,\dagger}_{\text{brem}} M^{\Delta}_{\text{brem}}$, приближенное выражение



$\mathcal{M}^{e}_{\text{brem}}$



$\mathcal{M}^{\Delta,(1)}_{\text{brem}}$

- Относительно простое выражение для интерференционного вклада $\delta^{(\text{int})}_{\Delta}$ можно получить, предполагая, что излученный фотон мягкий, и сохраняя первые члены разложения по $M_\Delta - M$

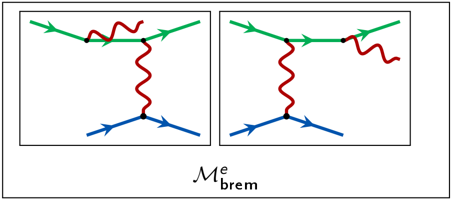
$$\delta^{(\text{int})}_{\Delta} \propto \int \omega d\omega d\Omega_\gamma \,\bar{\sum} 2\text{Re}\left[\mathcal{M}^{e,\dagger}_{\text{brem,soft}}\mathcal{M}^{\Delta,(1)}_{\text{brem}}\right],$$

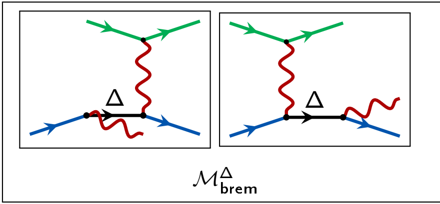
где интегрирования зависит от конкретных экспериментальных ограничений.

- в этом приближении для экспериментов, в которых все направления вылета фотона допустимы (в экспериментах с магнитным спектрометром) в специальной системе отсчета $\mathrm{l} + \mathrm{p} - \mathrm{l}' = 0$

$$2\text{Re}\left[\mathcal{M}^{e,\dagger}_{\text{brem,soft}}\mathcal{M}^{(1)}_{\Delta}\right] \propto \left[\mathrm{k} \times \left(\frac{\mathrm{l}'}{(l'k)} - \frac{\mathrm{l}}{(lk)}\right)\right],$$

интеграл по углам вылета фотона обращается в 0





Интерференция $M^{e,\dagger}_{\text{brem}} M^{\Delta}_{\text{brem}}$ для эксперимента ВЭПП-3:

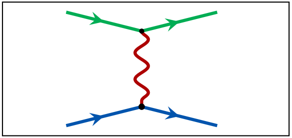
- для эксперимента на накопителе ВЭПП-3 область интегрирования по частоте и углу вылета фотона имеет сложную структуру, так как накладываются дополнительные условия на угол вылета конечного протона $(\Delta\theta_p, \Delta\phi_p)$
- численное интегрирование приближенного выражение $\propto \bar{\sum} 2\mathrm{Re}\left[\mathcal{M}^{e,\dagger}_{\text{brem,soft}} \mathcal{M}^{\Delta,(1)}_{\text{brem}}\right]$ дает оценку по порядку величины
- более аккуратное численное интегрирование полного выражения $\delta^{(\text{int})}_{\Delta} < 0.01\%$ убеждает, что этот вклад не может повлиять на результаты эксперимента ВЭПП-3, где вклад амплитуд ДФО был обнаружен на уровне 1%

- Эксперимент, предложенный А. А. Воробьевым (ПИЯФ) [Phys.Part.Nucl.Lett. 16 (2019) 5, 524]:
  - измерение дифференциального по передаче импульса сечения упругого ep-рассеяния
  - при энергии налетающих электронов $E = 720$ MeV
  - для передач импульса $0.001 \le Q^2 \le 0.04$ GeV^2
  - регистрация протона отдачи
- условия эксперимента

$$E \simeq E' \sim M, \qquad m^2 \ll Q^2 \ll E^2,\ EM,\ M^2,$$

$$E'_p = M + \frac{Q^2}{2M}, \qquad E' = E - \frac{Q^2}{2M}$$

где E, E' — энергия начального и конечного электрона в упругом процессе, E'_p — энергия протона отдачи, M, m — массы протона и электрона.



$\mathcal{M}_\text{В}$

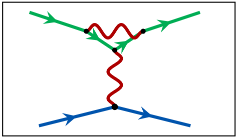
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\text{В}}{\mathrm{d}Q^2} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} G_E^2(Q^2),$$

$G_E(Q^2)$ — электрический формфактор протона

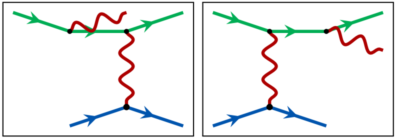
$$G_E(Q^2) \approx 1 - \frac{\langle r_E^2 \rangle}{6} Q^2$$

$\langle r_E^2 \rangle$ — зарядовый радиус ($0.84(\mu H, H, ep)$ – $-0.88(ep, H)$ fm)

Радиационные поправки



$\mathcal{M}^e_{\mathrm{vertex}}$



$\mathcal{M}^e_{\mathrm{brem}}$

- учет радиационных поправок

$$d\sigma = d\sigma_B(1 + \delta_{\mathrm{virt}} + \delta_{\mathrm{real}})$$

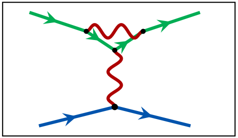
- поправка к электронной вершине

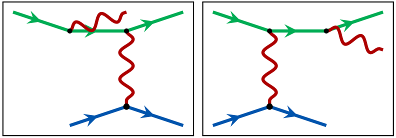
$$\delta^e_{vertex} = -\frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} - 1\right)\ln\frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{Q^2}{m^2} - \frac{3}{2}\ln\frac{Q^2}{m^2} - \frac{\pi^2}{6} + 2\right]$$

- излучение мягких фотонов с частотой $\omega < \omega_0$ в системе покоя начального протона

$$\delta^e_{soft} = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) - 1\right)\ln\left(\frac{4\omega_0^2}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{4E^2}{m^2}\right) - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{4E'^2}{m^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{4EE'}{Q^2}\right) + \ln\left(\frac{4EE'}{m^2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{Q^2}{4EE'}\right) - \frac{\pi^2}{3}\right]$$

Поправка к вершине + излучение мягких фотонов



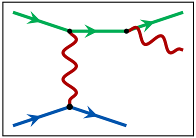


- поправка к вершине + излучение мягких фотонов (в первой строке основной вклад)

$$\delta^e_{vertex} + \delta^e_{soft} = \frac{\alpha}{\pi}\left[-\left(\ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) - 1\right)\ln\left(\frac{EE'}{\omega_0^2}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{Q^2}{m^2} - 2\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{E}{E'}\right) + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{Q^2}{4EE'}\right) - \frac{\pi^2}{6}\right] ,$$

- сумма вкладов содержит коллинеарные логарифмы $\ln\frac{Q^2}{m^2}$,
- необходимо еще учесть вклад излучения "жестких" фотонов
- в общем случае $\ln\frac{Q^2}{m^2}$ остаются и после учета излучения жестких фотонов

- Метод квазиреальных электронов (Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A. Nucl.Phys. B 65 (1973) 381) дает простую физическую картину: сечение тормозного излучения — сумма вкладов от излучения начальным и конечным электронами
- излучение конечным электроном (здесь l', E' — 4-импульс и энергия электрона в упругом процессе, k, ω — 4-импульс и частота фотона)



$\mathcal{M}_{\text{f.e.e.}}$

$$\frac{\omega\, d\sigma^{f.e.e.}}{d^3k} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\left(\frac{E'^2+(E'-\omega)^2}{\omega\, E'(k\cdot l')} - \frac{m^2}{(k\cdot l')^2}\frac{(E'-\omega)}{E'}\right) d\sigma_B\ ,$$

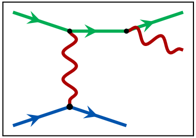
с логарифмической точностью верхний предел по углу излучения фотона принимаем равным углу рассеяния в упругом процессе (возникает $\ln\frac{Q^2}{m^2}$)

$$\frac{x\, d\sigma^{f.e.e.}}{dx} = \frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{m^2}\left(1+(1-x)^2\right) d\sigma_B\ , \qquad x = \omega/E'$$

Тормозное излучение. Метод квазиреальных электронов

- излучение конечным электроном проинтегрированное по частоте фотона от ω_0 до E'

$$d\sigma^{f.e.e.} = \frac{\alpha}{\pi} \ln\frac{Q^2}{m^2}\left(\ln\frac{E'}{\omega_0} - \frac{3}{4}\right) d\sigma_B \ .$$



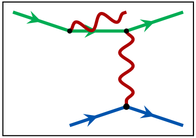
$\mathcal{M}_{\text{f.e.e.}}$

- сокращает коллинеарные логарифмы с коэффициентом $\ln\frac{E'}{\omega_0}$ и половину вклада с независящим от энергии коэффициентом при добавлении к

$$\delta^e_{vertex} + \delta^e_{soft} \approx \frac{\alpha}{\pi}\left[-\left(\ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) - 1\right)\ln\left(\frac{EE'}{\omega_0^2}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{Q^2}{m^2} - 2\right]$$

- дальше покажем, что учет излучения начальным электроном сокращает оставшиеся вклады, содержащие $\ln\frac{Q^2}{m^2}$

- излучение начальным электроном меняет энергию начального электрона и сечение процесса инициированного электроном после излучения (l, E — 4-импульс и энергия начального электрона)



$\mathcal{M}_{\text{i.e.e.}}$

$$d\sigma^{i.e.e.} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{m^2} \int_{\omega_0/E}^{x_m} \frac{dx}{x} \left(1 + (1-x)^2\right) d\sigma_B \Big|_{\vec{l} \to \vec{l}(1-x)} ,$$

$x = \omega/E$, $x_m = 1 - \frac{\sqrt{Q^2(Q^2+4M^2)}+Q^2}{4EM}$.

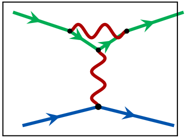
- в большинстве экспериментов сокращение радиационных поправок не происходит
- тем не менее в рассматриваемой постановке $d\sigma_B/dQ^2$ не зависит от энергии электрона и вклад $d\sigma^{i.e.e.}$ такой же как $d\sigma^{f.e.e.}$
- Т.о. метод квазиреальных электронов позволяет показать сокращение РП с логарифмической точностью

Сокращение в электронном вкладе в радиационные поправки

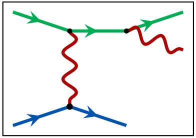
- в однопетлевом приближении сокращение происходит не только с логарифмической точностью, но и члены, не содержащие коллинеарные логарифмы, также сокращаются, первая поправка пропорциональна $\frac{Q}{E}$

$$\delta^e_{\text{vertex}} + \delta^e_{\text{soft}} + \delta^e_{\text{hard}} = -\frac{\alpha}{\pi}\frac{Q}{4E}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + \ln\frac{4E^2}{m^2} + 1\right)$$

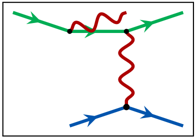
- приближенными методами получить этот результат нельзя, может быть получен двумя способами
  - точным расчетом спектра тормозного излучения с последующим интегрированием по частоте фотона
  - с использованием метода структурных функций



$\mathcal{M}^e_{\text{vertex}}$



$\mathcal{M}_{\text{f.e.e.}}$



$\mathcal{M}_{\text{i.e.e.}}$

- для процесса $e(l)+p(p) \to e(l')+p(p')+\gamma(k)$, в котором электроном излучается фотон $\omega > \omega_0$ используем метод инвариантного интегрирования

$$\frac{d\sigma^e_{\text{brem}}}{M\, d\omega\, dQ^2} = \frac{1}{512\pi^4 M^2 E^2} \int d\kappa\, d\kappa' \frac{\bar{\sum}|\mathcal{M}^e_{\text{brem}}|^2}{\sqrt{-S}},$$

где $\kappa = (k \cdot l)$, $\kappa' = (k \cdot l)$, S - кинематический инвариант (детерминант Грама $\{l, p, l', k\}$), $q = p - p'$ - передача импульса, $Q^2 = -q^2$

- квадрат матричного элемента

$$\bar{\sum} |\mathcal{M}^e_{\text{brem}}|^2 = \frac{16 M^2 e^6}{Q^4} \left\{ \frac{4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2}{4M^2 + Q^2} \left[X_1 - \frac{1}{2} X_2 \right] + G_M^2 \frac{Q^2}{4M^2} X_2 \right\},$$

где E, E'-энергии начального и конечного электронов, $G_E(Q^2), G_M(Q^2)$ — форм-факторы протона

$$X_1 = \left(\frac{Q^2}{2\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa^2} \right) E'(E - \omega) + \left(\frac{Q^2}{2\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa'^2} \right) E(E' + \omega) - \frac{Q^2}{2M} \left(\frac{E}{\kappa} + \frac{E'}{\kappa'} \right)$$

$$X_2 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{Q^2}{\kappa\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa^2} - \frac{m^2}{\kappa'^2} \right) + \left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) + Q^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa'} \right)$$

- прямое вычисление интегралов позволяет найти дифференциальное по частоте фотона и передаче импульса сечение $\frac{d\sigma^e_{\mathbf{brem}}}{d\omega dQ^2}$
- выделяется 3 области по частоте фотона, интегрирование по которым дает вклад в радиационные поправки (с точностью до первых поправок содержащих $Q/\{E,M\}$)

$$\delta^{(I)}_{\mathbf{hard}} = \int_{\omega_0}^{\omega_-} d\omega \left[\frac{d\sigma^e_{\mathbf{brem}}}{d\omega\ dQ^2} \Big/ \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(\ln\frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \left(\ln\frac{Q^2}{4\omega_0^2} - \frac{Q}{M} - \frac{Q}{E} \right) \right\}$$

$$\delta^{(II)}_{\mathbf{hard}} = \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega \left[\frac{d\sigma^e_{\mathbf{brem}}}{d\omega\ dQ^2} \Big/ \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left(\ln\frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) \ln\frac{4E^2}{Q^2} - \frac{3}{2}\ln\frac{Q^2}{m^2} + 2 + \frac{Q}{M}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} - 1 \right) + \frac{Q}{4E}\ln\frac{4E^4}{m^2 Q^2} + \frac{3Q}{2E}\left(\ln\frac{Q}{E} - 1 \right) \right\}$$

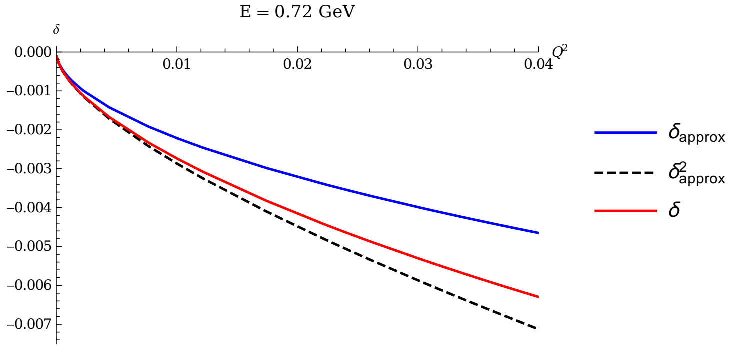
$$\delta^{(III)}_{\mathbf{hard}} = \int_{\omega_+}^{\omega_{\mathbf{max}}} d\omega \left[\frac{d\sigma^e_{\mathbf{brem}}}{d\omega\ dQ^2} \Big/ \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \right] = \frac{\alpha}{\pi}\frac{Q}{4E} \left(\ln\frac{Q^2}{16m^2} + 1 \right)$$

- где $\omega_- = \frac{Q}{2}$, $\omega_+ = E - \frac{Q}{2}$, $\omega_{\mathbf{max}} = E - \frac{Q^2}{2M}$

- приходим к выражению (с точностью до первых поправок содержащих Q/E)

$$\delta^e_{\text{vertex}} + \delta^e_{\text{soft}} + \delta^e_{\text{hard}} \approx \delta_{\text{approx}} = -\frac{\alpha}{\pi}\frac{Q}{4E}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + \ln\frac{4E^2}{m^2} + 1\right)$$

- можно сравнить точный результат в однопетлевом приближении (требуется только малость массы электрона) и разложение по степеням Q



Метод структурных функций электрона I

- сокращение можно показать с использованием партонной картины, которая применяется к “глубоконеупругому протон-электронному рассеянию”

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{Q^4} \frac{1}{\sqrt{(p \cdot l)^2 - m^2 M^2}} J^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p},$$

- протонный тензор $P = p + p'$

$$J^{\mu\nu} = G_M^2 \left(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu\right) + \frac{4M^2 G_E^2 + Q^2 G_M^2}{4M^2 + Q^2} P^\mu P^\nu \quad ,$$

- тензор “глубоконеупругого протон-электронного рассеяния”

$$W_{\mu\nu}(l, q) = \frac{1}{4\pi} \overline{\sum}_X \langle l | j_\nu^{(e,\dagger)}(0) | X \rangle \, \langle X | j_\mu^{(e)}(0) | l \rangle \, (2\pi)^4 \delta(q + l - p_X) \ .$$

Здесь $|l\ >$ — начальное состояние электрона, X — любое состояние, которое рождается γe-столкновениях

Метод структурных функций электрона II

- тензор глубоконеупругого рассеяния через структурные функции электрона $f_{1,2}$

$$W^{\mu\nu}(l,q) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) f_1(x,Q^2) + \frac{1}{(lq)}\left(l^\mu - \frac{(l\cdot q)}{q^2}q^\mu\right)\left(l^\nu - \frac{(l\cdot q)}{q^2}q^\nu\right) f_2(x,Q^2)\ ,$$

- в результате приходим к общему выражению

$$\frac{d\sigma}{dx\ dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{2x^2Q^2((p\cdot l) - m^2M^2)}\Big[(2Q^2G_M^2 - 4M^2G_E^2)f_1(x,Q^2) + \left(-G_M^2(m^2Q^2 + (l\cdot q)^2) + \frac{Q^2G_M^2 + 4M^2G_E^2}{4M^2+Q^2}(P\cdot l)^2\right)\frac{f_2(x,Q^2)}{(l\cdot q)}\Big]$$

$x = \frac{Q^2}{2(l\cdot q)}, \quad (P\cdot l) = 2ME - \frac{Q^2}{2x}.$

- используя выражения для структурных функций электрона $f_{1,2}$ в однопетлевом приближении воспроизводится $\delta_{\text{approx}} \propto Q$ и следующей поправки $\propto Q^2$

Метод структурных функций электрона III

- сокращение радиационных поправок с логарифмической точностью имеет место и в более высоких порядках
- с учетом экспериментальных условий и соотношения Каллана-Гросса $f_2 = 2xf_1$ дает дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{d\sigma_B}{dQ^2} \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{x}\ f_2(x, Q^2)\ , \qquad x_0 = \frac{Q}{2E} \ll 1\ .$$

- с логарифмической точностью структурные функции выражаются через партонные распределения в начальном электроне

$$f_2 = x(f_e^e + f_e^{\bar{e}})\ ,$$

  - электронное распределение при этом равно распределению валентных электронов f_e^v, которое не сингулярно при малых значениях x
  - позитронное распределение $f_e^{\bar{e}}$ появляется в двухпетлевом приближении
- сокращение логарифмических вкладов в РП имеет простое объяснение на языке партонных распределений

$$\int_0^1 dx\ f_e^v(x, Q^2) = 1$$

вне зависимости от величины Q^2, т.к. является следствием сохранения заряда

Результаты III

- Различными способами продемонстрировано сокращение вкладов в радиационные поправки к сечению упругого ep-рассеяния для экспериментов по измерению зарядового радиуса протона.
- В однопетлевом приближении обнаружено, что сокращение происходит с точностью до членов, не содержащих коллинеарные логарифмы $\ln \frac{Q^2}{m^2}$. Остаточный электронный вклад в радиационные поправки в рассматриваемой постановке эксперимента подавлен первой степенью отношения Q/E.
- При использовании метода структурных функций электрона сокращение логарифмических вкладов получило простое объяснение на языке "партонных" распределений

Заключение

- Выполнено сравнение традиционного и более современного расчетов радиационных поправок к сечению упругого электрон-протонного рассеяния, основанных на мягкофотонном приближении. **В модели бесструктурного протона проанализированы точные и приближенные выражения для амплитуды двухфотонного обмена**. Обнаружено, что явные недостатки подходов при применении их к отдельных диаграммам компенсируются в полных выражениях для вклада в виртуальные радиационные поправки. **В вычислениях радиационных поправок, связанных с излучением реального фотона, установлена неточность традиционной процедуры**
- Для эксперимента на накопителе ВЭПП-3 в ИЯФ СО РАН проанализирован **возможный вклад в радиационные поправки от тормозного излучения с учетом возбуждения** $\Delta(1232)$. Обнаружено, что он **не может существенно повлиять на отношение сечений** рассеяния электронов и позитронов на протонах, наблюдаемых в этом эксперименте
- Исследовано **важное свойство экспериментов по измерению зарядового радиуса протона: сокращение главных вкладов в радиационные поправки** к дифференциальному по передаче импульса протону сечению упругого рассеяния. Представлено теоретическое описание механизма этого сокращения с использованием различных методов и различной степенью точности