ПОВЕДЕНИЕ НЕСИНГЛЕТНОЙ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ МАЛЫХ X В ПЕРТУРБАТИВНОЙ КХД

С. И. Манаенков

Петербургский институт ялерной физики,
Российская академия наук,
Гатчина, Ленинградская область, 188350, Россия

Аннотация

Получено точное решение интегрального уравнения, описывающего дважды логарифмические вклады в несинглетную структурную функцию f_{NS} для произвольного параметра инфракрасного обрезания μ. Показано, что при $\mu = \Lambda_{QCD}$, $x \to 0$, $f_{NS} = g^2 x^{-g}[\ln(Q^2/\mu^2) + \psi(1) - \psi(g)]$, где $g = 8/(33 - 2n_f)$, а $\psi(z)$ означает логарифмическую производную гамма-функции. Поведение f_{NS} при малых x, когда $\mu > \Lambda_{QCD}$, исследовано численно.

1 ВВЕДЕНИЕ

Знание поведения при малых x несинглетной структурной функции $f_{NS}(x,Q^2)$ в глубоко неупругом рассеянии важно для правильного описания распределений партонов в адронах. Проверка справедливости правил сумм Готтфида, Эллиса-Джаффе, Бьеркена (Gottfried, Ellis-Jaffe, Bjorken) также требует знания асимптотического поведения $f_{NS}(x,Q^2)$ при $x \to 0$, так как необходимо экстраполировать экспериментально измеренные структурные функции в область очень малых x. Один из наиболее популярных способов предсказать асимптотику f_{NS} в рамках КХД состоит в экстраполяции в эту область уравнений Альтарелли-Паризи, описывающих ДГЛАП-эволюцию структурных функций относительно $\ln(Q^2)$ [1], [2], [3]. Надо, однако, заметить, что эти уравнения справедливы только в области $\ln(Q^2/\mu^2) \gg \ln(1/x)$, где они правильно суммируют лидирующие вклады лестничных диаграмм Фейнмана [3]. В этом случае поперечные импульсы k_{jT} виртуальных кварков строго упорядочены (см. рис. 1)

$$|k^2_{nT}| \ll \ ... \ \ll |k^2_{2T}| \ \ll \ |k^2_{1T}| \ll Q^2 \ , \tag{1}$$

где $q^2 = -Q^2 < 0$ означает квадрат переданного в глубоко неупругом рассеянии 4-импульса. Однако упорядочивание (1) не имеет места при суммировании лидирующих дважды логарифмических (ДЛ) вкладов в f_{NS} при $x \to 0$, где условие (1) следует заменить упорядочиванием судаковских переменных α_j, β_j [4] для 4-импульса k_j

$$\begin{aligned} \alpha_n \ll \ ... \ \alpha_2 \ll \ \alpha_1 \ll 1, \\ 1 \gg \beta_n \gg \ ... \ \gg \beta_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Суммирование дважды логарифмических вкладов в квантовой электродинамике для постоянной константы связи (постоянной тонкой структуры) впервые было выполнено в [5] (см. также обзор [6]) с помощью интегрального уравнения, которое ниже для краткости будет именоваться дважды логарифмическим интегральным уравнением. Аналитическое решение этого уравнения, найденное в [5], может быть выражено через функции Инфельда. Оно совпадает с решением, полученным в [7] с помощью уравнения эволюции по параметру инфракрасного обрезания в пространстве поперечных импульсов. Этот метод впервые был применен в [8] для описания упругого рассеяния кварков. Обобщение дважды логарифмического интегрального уравнения на случай бегущей константы связи в КХД было сделано в

[7], где обсуждались также свойства его решений, найденных численными методами. В настоящей работе будет получено общее аналитическое решение ДЛ интегрального уравнения, описывающее КХД-эволюцию несинглетных кварковых распределений. Мы обсудим также поведение решений как в области $\ln(Q^2/\mu^2) \gg \ln(1/x)$, так и в области $\ln(Q^2/\mu^2) \ll \ln(1/x)$.

План статьи следующий. В разделе 2 будет получено общее решение ДЛ интегрального уравнения для произвольного параметра инфракрасного обрезания μ. В разделе 3 будут обсуждены свойства решений ДЛ интегрального уравнения как в области $\ln(Q^2/\mu^2) \gg \ln(1/x)$, так и асимптотическое поведение при $x \to 0$ для случая $\mu = \Lambda$ (здесь и ниже $\Lambda = \Lambda_{QCD}$). В разделе 4 мы выведем асимптотическую формулу для $f_{NS}(x, Q^2)$ при $x \ll 1$, $\mu = \Lambda$ и обсудим поведение при малых x несинглетной структурной функции, когда $\mu > \Lambda$. В разделе 5 сформулированы основные выводы.

2 ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БЕГУЩЕЙ КОНСТАНТОЙ

Чтобы просуммировать все дважды логарифмические вклады в несинглетную структурную функцию свободного кварка $f_{NS}(x, Q^2)$ в случае бегущей константы сильных взаимодействий α_s, нужно решить следующее интегральное уравнение [7]

$$A(t,\beta) = \frac{C_F}{2\pi}\alpha_s(t/\beta) + \frac{C_F}{2\pi}\int_\beta^1 \frac{d\beta'}{\beta'}\int_{\mu^2}^{t_m}\frac{dt'}{t'}A(t',\beta')\alpha_s(t_m) \ , \qquad (3)$$

где $C_F = (N^2-1)/2N$ для цветовой группы $SU(N)$. Интегральное уравнение (3) графически изображено на рис. 2. Прямые линии отвечают кваркам, а глюонные обмены изображены волнистыми линиями. Все промежуточные частицы в S-канале находятся на массовой поверхности. Для 4-импульса k мы используем судаковскую параметризацию

$$k = -\alpha\tilde{q} + \beta p + k_T, \quad -k_T^2 \equiv t \geq 0 \ , \qquad (4)$$

где

$$\tilde{q}_\mu = q_\mu - \frac{q^2 p_\mu}{2pq} \qquad (5)$$

и аналогичную параметризацию для k'. Как показано в [7] аргумент бегущей константы связи α_s в (3) равен t_m, где

$$t_m = t\beta'/\beta \ . \tag{6}$$

Связь $A(t,\beta)$ со структурной функцией f_{NS} дается формулой

$$f_{NS}(x,Q^2) = \delta(1-x) + \int_{\mu^2}^{S_m} A(t,\tilde{\beta})\frac{dt}{t} \ , \tag{7}$$

где для малых x $S_m = Q^2/(4x)$ и

$$\tilde{\beta} = x(1+t/Q^2) \ . \tag{8}$$

Во избежание недоразумений отметим, что нормировка $A(t,\beta)$ в (3) отличается множителем $8\pi^2$ от использованной в [7]. Выражение для α_s в однопетлевом приближении имеет вид [9], [10]

$$\alpha_s(P^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(P^2/\Lambda^2)} \ , \tag{9}$$

где n_f означает число активных кварковых ароматов в рассматриваемом процессе. В наших расчетах параметр Λ везде полагался равным
200 МэВ/с.

Введем удобные для дальнейшего переменные соотношениями

$$\begin{gathered} y = \ln(t/\Lambda^2), \quad y' = \ln(t'/\Lambda^2), \\ z = \ln(1/\beta), \quad z' = \ln(1/\beta'), \quad b = \ln(\mu^2/\Lambda^2) \ , \end{gathered} \tag{10}$$

тогда уравнение (3) перепишется в форме

$$B(y,z) = \frac{g}{y+z} + \int_0^z dz' \frac{g}{y+z-z'} \int_b^{y+z-z'} dy' B(y',z') \ , \tag{11}$$

где $B(y,z) = A(t,\beta)$, а через g обозначена величина

$$g = 8/(33-2n_f) \ . \tag{12}$$

Прежде, чем искать решение (11), мы получим необходимое в дальнейшем неравенство. Используем очевидное при $y \geq b$ $(t \geq \mu^2)$ неравенство

$$g/(y+z) \leq g/b \ . \tag{13}$$

Далее запишем $B(y,z)$ в виде ряда

$$B(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n B_n(y,z) \tag{14}$$

и, подставив (14) и (13) в (11), получим

$$B_1 \leq g/b \ , \tag{15}$$

$$B_2 \leq \int_0^z dz' \frac{g}{y+z-z'} \int_b^{y+z-z'} dy' \frac{g}{b} = \frac{g}{b} \int_0^z dz' \frac{g(y+z-z'-b)}{y+z-z'} \leq \frac{g}{b}\frac{gz}{1!} \ , \tag{16}$$

$$B_3 \leq \int_0^z dz' \frac{z'}{1!} \frac{g}{y+z-z'} \int_b^{y+z-z'} dy' \frac{g^2}{b} \leq \frac{g}{b}\frac{g^2 z^2}{2!} \ , \ \ldots \ . \tag{17}$$

Нетрудно с помощью индукции вывести искомое неравенство

$$B(y,z) \leq \frac{g}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n}{n!} = \frac{g}{b} \ \exp\{gz\} \ . \tag{18}$$

Легко получить из (11) соотношение

$$\frac{\partial B(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial B(y,z)}{\partial y} = \frac{g}{y} \int_b^y dy' B(y',z) \ , \tag{19}$$

из которого следует граничное условие при $y = b$ и $b \neq 0$

$$[\frac{\partial B(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial B(y,z)}{\partial y}]|_{y=b} = 0 \ . \tag{20}$$

Умножая (19) на y и дифференцируя по y, приходим к дифференциальному уравнению для $B(y,z)$

$$y\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 B}{\partial y \partial z} + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} + gB = 0 \ . \tag{21}$$

Чтобы решить (21) с граничным условием (20), рассмотрим лапласовский образ $\phi(y,\rho)$, определенный соотношением

$$\phi(y,\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho z} B(y,z) dz \ . \tag{22}$$

В силу неравенства (18), интеграл в (22) сходится для комплексных ρ, у которых $Re\ \rho > g$, причем из (18) следует оценка

$$|\phi(y,\rho)| \leq \frac{g}{b} \int_0^\infty \ \exp\{-(Re\ \rho - g)z\} dz = \frac{g}{b(Re\ \rho - g)} \ . \tag{23}$$

Далее, из (11) следует второе граничное условие

$$B(y,0) = g/y \ , \tag{24}$$

с помощью которого легко найти, что

$$\int_0^\infty \frac{\partial B(y,z)}{\partial z} e^{-\rho z} dz = \rho\phi(y,\rho) - g/y \ . \tag{25}$$

Производя преобразование Лапласа уравнения (21) и учитывая (22) и (25), приходим к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции

$$v\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + (1-v)\frac{\partial\omega}{\partial v} - (1-\lambda)\omega = 0 \ , \tag{26}$$

где мы ввели обозначения $v = \rho y$, $\lambda = g/\rho$, $\omega(v,\rho) = \phi(y,\rho)$.

Общее решение дифференциального уравнения (26) может быть представлено в виде [11]

$$\omega(v,\rho) = v^{-1/2} e^{v/2} \{ C(\rho) W_{\lambda-1/2,\,0}(v) + S(\rho) W_{1/2-\lambda,\,0}(-v) \} \ , \tag{27}$$

где $W_{k,\,m}(\zeta)$ означает функцию Уиттекера. Для больших y ($v = y\rho \gg 1$, ρ - вещественно и больше g) справедлива асимптотическая формула [11]

$$W_{k,\,m}(\pm x) = (\pm x)^k e^{\mp x/2} [1 + O(1/x)] \ . \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и сравнивая полученное выражение с (23), заключаем, что они совместны только тогда, когда $S(\rho) \equiv 0$. Производя преобразование Лапласа по переменной z граничного условия (20), получим, вспоминая (25), соотношение

$$\omega(\zeta,\rho) - \frac{\partial\omega(v,\rho)}{\partial v}|_{v=\zeta} = g/\zeta \ , \tag{29}$$

где $\zeta = \rho b$. Подставляя (27) в (29) и помня, что $S(\rho) \equiv 0$, получим для $C(\rho)$ выражение

$$C(\rho) = \frac{g}{\zeta} [H(\zeta,\lambda) - \frac{\partial H(\zeta,\lambda)}{\partial\zeta}]^{-1} \ , \tag{30}$$

где мы использовали сокращение

$$H(v,\lambda) = v^{-1/2} e^{v/2} W_{\lambda-1/2,\,0}(v) \ . \tag{31}$$

Используем теперь известное представление для функции Уиттекера

$$W_{k,\,m}(x) = \frac{x^k e^{-x/2}}{\Gamma(1/2 - k + m)} \int_0^\infty t^{-k-1/2+m}(1 + t/x)^{k-1/2+m} e^{-t} dt \ , \tag{32}$$

справедливое, когда $Re(k-m-1/2) \le 0$ [11]. Для нашего случая это условие имеет вид $Re(g/\rho) < 1$. В (32) $\Gamma(z)$ означает Γ-функцию. Подставляя (32) в (30), (31), перепишем (27) в окончательном виде

$$\omega(v, p) = H(v, \lambda) C(\rho) \ , \tag{33}$$

$$H(v, \lambda) = v^{-1/2} e^{v/2} W_{\lambda-1/2,\,0}(v) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^\infty \tau^{-\lambda}(1+\tau)^{\lambda-1} e^{-v\tau} d\tau \ , \tag{34}$$

$$C(\rho) = \frac{g e^{-\zeta/2}}{W_{\lambda,\,1/2}(\zeta)} = g\Gamma(1-\lambda)\{\int_0^\infty (1+\zeta/\tau)^\lambda e^{-\tau} d\tau\}^{-1} \ . \tag{35}$$

Напомним, что $v = \rho y$, $\lambda = g/\rho$, $\zeta = \rho b$, а y, z, b, g определены в (10) и (12). Искомая функция $B(y, z)$ получается из $\omega(\rho y, \rho)$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$B(y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\rho e^{\rho z} \omega(\rho y, \rho) \ . \tag{36}$$

Параметр a в (36) должен быть выбран так, чтобы все особенности $\omega(\rho y, \rho)$ в комплексной плоскости ρ лежали слева от контура интегрирования. Формулы (33), (34), (35), (36) дают общее решение ДЛ интегрального уравнения (11).

3 ОБСУЖДЕНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Из формул (33) и (34) следует, что для любых y и y_0 справедлива формула

$$\omega(\rho y, \rho) = \sqrt{\frac{y_0}{y}} \exp\{\rho(y - y_0)/2\} \frac{W_{\lambda-1/2,\,0}(\rho y)}{W_{\lambda-1/2,\,0}(\rho y_0)} \omega(\rho y_0, \rho) \ . \tag{37}$$

Формула (37) связывает моменты функции $A(t, \beta)$ и $A(t_0, \beta)$. Действительно, из (10), (22) следует формула

$$\omega(\rho \ln(t/\Lambda^2), \rho) = \int_0^\infty B(y, z) e^{-\rho z} dz = \int_0^1 A(t, \beta) \beta^{\rho-1} d\beta \tag{38}$$

и аналогичное соотношение для $A(t_0, \beta)$. Соотношение (37) получено в пертурбативной КХД. Пусть $t > t_0$ и t_0 достаточно велико, так что эволюция для $-k_T^2 > t_0$ чисто пертурбативная. Если непертурбативные эффекты включены в $\omega(\rho y_0, \rho)$ (например, $\omega(\rho y_0, \rho)$ получена из экспериментальных данных по глубоко неупругому рассеянию лептонов на нуклонах), то они оказываются автоматически правильно учтенными и при больших t с помощью соотношения (37).

При выполнении условий

$$|\rho y| \gg 1 \ , \quad |\rho y_0| \gg 1 \tag{39}$$

можно использовать для функций Уиттекера в (37) асимптотическую формулу (28). В этом случае (37) переходит в соотношение

$$\omega(\rho \ln(t/\Lambda^2), \rho) = [\ln(t/\Lambda^2)/\ln(t_0/\Lambda^2)]^{g/\rho - 1}\omega(\rho \ln(t_0/\Lambda^2), \rho) \ . \tag{40}$$

Формула (40) является аналогом известного соотношения для моментов структурных функций, отвечающих ДГЛАП эволюции. Действительно, в несинглетном случае для ρ-тых моментов структурных функций $F(Q^2)_\rho$ справедливо соотношение [12]

$$F_\rho(Q^2) = F_\rho(Q^2)[\alpha_s(Q^2)/\alpha_s(Q_0^2)]^{a_\rho} = F_\rho(Q_0^2)[\ln(Q^2/\Lambda^2)/\ln(Q_0^2/\Lambda^2)]^{-a_\rho} \ , \tag{41}$$

где

$$a_\rho = \frac{4}{33 - 2n_f}\{1 - \frac{2}{\rho(\rho+1)} + 4[\psi(\rho+1) + \gamma_E - 1]\} \ . \tag{42}$$

В (41) учтено выражение (9) для бегущей константы связи в КХД. Через $\psi(z)$ в (42) обозначена логарифмическая производная гамма-функции, а $\gamma_E = 0,5772...$ - константа Эйлера. Нетрудно видеть из (42) и (12), что при $\rho \to 0$ сингулярная часть a_ρ имеет вид $a_\rho \to -g/\rho$. При малых ρ доминирующий вклад в (22) дают большие z, отвечающие согласно (10) малым значениям $\beta : \rho \sim 1/z \sim 1/\ln(1/\beta)$. Из сказанного следует, что условие (39) выполнено, когда

$$y = \ln(t/\Lambda^2) \gg 1/\rho \sim \ln(1/\beta) \ . \tag{43}$$

При малых x в (7) основной вклад в интеграл дают $t \leq Q^2$ при этом $\tilde{\beta} \sim x$. Поэтому условие применимости приближения Альтарелли-Паризи (39) можно переформулировать в виде

$$\ln(Q^2/\Lambda^2) \gg \ln(1/x) \ . \tag{44}$$

Для экспериментально достижимых сегодня на ep-коллайдере ГЕРА Q^2 и x ($Q^2 \leq 300$ (ГэВ/с)^2, $x \geq 10^{-4}$) условие (44) не выполнено ($\ln(Q^2/\Lambda^2) \leq 8,92$, $\ln(1/x) \leq 9,21$). Поэтому нельзя применять (40), а необходимо использовать формулу (37), в которой произведен точный учет всех дважды логарифмических членов и которая верна даже тогда, когда $\ln(1/x) \gg \ln(Q^2/\Lambda^2)$. Последнее обстоятельство особенно важно при проверке правил сумм, содержащих интеграл по x от 0 до 1. Во избежание недоразумений отметим, что при $x \sim 1$ как (40), так и (37) перестают быть применимыми и необходимо использовать формулы (41) и (42).

Отметим полезную формулу, связывающую $B(y,z)$ с $B(y_0,z)$ и следующую непосредственно из (37), (22), (36)

$$B(y,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\rho \exp\{\rho(z + y/2 - y_0/2)\}$$
$$\sqrt{\frac{y_0}{y}}\frac{W_{\lambda-1/2,\,0}(\rho y)}{W_{\lambda-1/2,\,0}(\rho y_0)}\int_0^\infty e^{-\rho z'}B(y_0,z')dz' \ . \tag{45}$$

При выполнении условия (39) и использовании соотношения (40) вместо (37) интегрирование по ρ можно выполнить с помошью теоремы Коши и получить вместо (45) формулу, справедливую при $y \geq y_0$ и больших z (малых β)

$$B(y,z) = B(y_0,z) +$$
$$+\frac{y_0}{y}\sqrt{g\ln(y/y_0)}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z-z'}} I_1(2\sqrt{g(z-z')\ln(y/y_0)})B(y_0,z') \ , \tag{46}$$

где $I_n(x)$ означает функцию Инфельда [11]. С помошью (46) можно описывать ДГЛАП-эволюцию несинглетных структурных функций при малых x, если выполнено условие (43).

Второй случай, когда можно выполнить интегрирование в (36) по ρ, отвечает $b = 0$ ($\mu = \Lambda$). Полагая $\zeta = 0$ в (35), получаем из представления $C(\rho)$ через интеграл формулу

$$C(\rho) = g\Gamma(1-\lambda) \ . \tag{47}$$

Подставляя (47) и выражение через интеграл (34) для $H(v,\lambda)$ в формулу (36), пишем цепочку равенств, меняя порядок интегрирования

$$B(y,z) = \frac{g}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} d\rho\ \exp\{\rho z\}\int_0^\infty (1+1/\tau)^{g/\rho}\ \exp\{-\rho y\tau\}\frac{d\tau}{1+\tau} =$$
$$= \frac{g}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\ \exp\{\rho(z-y\tau)\}\sum_{n=0}^\infty \frac{[g\ln(1+1/\tau)]^n}{\rho^n n!}d\rho = J_1 + J_2 \ . \tag{48}$$

Для члена в сумме с $n = 0$ в (48) полагаем $\rho = a + ir$, тогда

$$J_1 = \frac{g}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau}\int_{-\infty}^\infty \exp\{a(z-\tau y)\}\exp\{ir(z-\tau y)\}dr =$$
$$= g\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau}\exp\{a(z-\tau y)\}\delta(z-\tau y) = \frac{g}{y+z}\ . \tag{49}$$

Когда $z - \tau y < 0$, для суммы остальных членов в (48) имеем

$$J_2 = \frac{g}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\{\rho(z-\tau y)\}\sum_{n=1}^\infty \frac{[g\ln(1+1/\tau)]^n}{\rho^n n!}d\rho =$$
$$= \frac{g}{2\pi i}\int_{C_2} \exp\{\rho(z-\tau y)\}\sum_{n=1}^\infty \frac{[g\ln(1+1/\tau)]^n}{\rho^n n!}d\rho = 0\ . \tag{50}$$

Контур C_2 показан на рис. 3. Равенство (50) справедливо в силу того, что интеграл по полуокружности бесконечного радиуса равен нулю, а интеграл по контуру равен нулю, так как подинтегральная функция имеет сингулярности только при $\rho = 0$. Когда $z - \tau y > 0$, пишем

$$J_2 = \frac{g}{2\pi i}\int_{C_1} \exp\{\rho(z-\tau y)\}\sum_{n=1}^\infty \frac{[g\ln(1+1/\tau)]^n}{\rho^n n!}d\rho =$$
$$= g\sum_{n=1}^\infty \frac{(z-\tau y)^{n-1}[g\ln(1+1/\tau)]^n}{(n-1)!n!}\ . \tag{51}$$

Интеграл по контуру C_1, показанному на рис. 3, вычислен с помощью теоремы о вычетах. Подставляя (49) и (51) в (48), получаем искомую формулу

$$B(y,z) = \frac{g}{y+z} + g\sum_{n=0}^\infty \int_0^{z/y}\frac{d\tau}{1+\tau}\frac{(z-\tau y)^n[g\ln(1+1/\tau)]^{n+1}}{n!(n+1)!} =$$
$$= \frac{g}{y+z} + g\int_0^{z/y}\frac{d\tau}{1+\tau}\sqrt{\frac{g\ln(1+1/\tau)}{z-\tau y}}I_1(2\sqrt{g(z-\tau y)\ln(1+1/\tau)})\ . \tag{52}$$

Вместо того, чтобы обосновывать законность преобразований, приведших к выражению (52), покажем, что оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (21), которое в переменных $\xi = y + z,\ \eta = z$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\xi-\eta)\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}\} = gM(\xi,\eta)\ , \tag{53}$$

где мы обозначили $M(\xi,\eta) = B(y,z)$. Из формулы (19) при $b = 0$ следует граничное условие для $M(\xi,\eta)$

$$\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}|_{\xi=\eta} = gM(\eta,\eta)\ . \tag{54}$$

Дифференцируя (52) по η при постоянном ξ, имеем

$$\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{g^2\ln(\xi/\eta)}{\xi-\eta}+$$
$$+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{g^{N+2}}{(N-1)!(N+1)!}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}d\tau[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-1}\ln^{N+1}(1+1/\tau)\ . \quad (55)$$

Для $\xi\to\eta$ из (55) получим, интегрируя по частям и учитывая, что внеинтегральные члены равны нулю, цепочку равенств

$$\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}|_{\xi=\eta}=\frac{g^2}{\eta}+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{g^{N+2}\eta^{N-1}}{(N-1)!(N+1)!}\int_0^{\infty}d\tau\ln^{N+1}(1+1/\tau)=$$
$$=\frac{g^2}{\eta}+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{g^{N+2}\eta^{N-1}}{(N-1)!N!}\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{1+\tau}\ln^{N}(1+1/\tau)=$$
$$=gM(\eta,\eta). \quad (56)$$

Последнее равенство в цепочке (56) следует из сравнения его с (52), если положить $n=N-1$. Сравнивая начало и конец (56) с (54), видим, что выражение (52) удовлетворяет граничному условию (54). Используя далее (55), легко найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\xi-\eta)\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}\}=\frac{g^2}{\xi}-\frac{g^3\eta\ln^2(\xi/\eta)}{2(\xi-\eta)}+$$
$$+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{g^{N+2}}{(N-1)!(N+1)!}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}d\tau[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-1}\ln^{N+1}(1+1/\tau)-$$
$$-\sum_{N=2}^{\infty}\frac{(\xi-\eta)g^{N+2}}{(N-2)!(N+1)!}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}\tau[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-2}\ln^{N+1}(1+1/\tau)d\tau\ . \quad (57)$$

Интегрирование по частям четвертого слагаемого J_4 в (57) дает

$$J_4=\sum_{N=2}^{\infty}\frac{g^{N+2}\tau}{(N-1)!(N+1)!}\ln^{N+1}(1+1/\tau)[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-1}|_0^{\eta/(\xi-\eta)}-$$
$$-\sum_{N=2}^{\infty}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}\frac{d\tau g^{N+2}[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-1}}{(N-1)!(N+1)!}$$
$$\{\ln^{N+1}(\frac{1+\tau}{\tau})-\frac{N+1}{1+\tau}\ln^{N}(\frac{1+\tau}{\tau})\}. \quad (58)$$

Подставляем теперь (58) в (57) и приходим к формуле

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\xi-\eta)\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}\}=\frac{g^2}{\xi}-\frac{g^3\eta\ln^2(\xi/\eta)}{2(\xi-\eta)}+\frac{g^3}{2}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}d\tau\ln^2(1+1/\tau)+$$

$$+\sum_{N=2}^{\infty}\frac{g^{N+2}}{(N-1)!N!}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}\frac{d\tau}{1+\tau}[\eta-(\xi-\eta)\tau]^{N-1}\ln^N(1+1/\tau)\ .(59)$$

Интегрируя, наконец, по частям третье слагаемое в (59)

$$\frac{g^3}{2}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}d\tau\ln^2(1+1/\tau)=$$
$$=\frac{g^3\tau}{2}\ln^2(1+1/\tau)\Big|_0^{\eta/(\xi-\eta)}+g^3\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}\frac{d\tau}{1+\tau}\ln(1+1/\tau)\ ,$$

приходим к искомой формуле

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\xi-\eta)\frac{\partial M(\xi,\eta)}{\partial\eta}\}=$$
$$=\frac{g^2}{\xi}+\sum_{N=0}^{\infty}\int_0^{\eta/(\xi-\eta)}\frac{d\tau g^{N+3}[\eta-(\xi-\eta)\tau]^N}{(1+\tau)N!(N+1)!}\ln^{N+1}(\frac{1+\tau}{\tau})=$$
$$=gM(\xi,\eta)\ . \qquad (60)$$

Последнее равенство в (60) следует из сравнения (60) с (52). Равенство (60) показывает, что $M(\xi,\eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (53).

4 ПОВЕДЕНИЕ $f_{NS}(x,Q^2)$ ПРИ МАЛЫХ x

С помощью новых переменных s и θ

$$s=\ln(1+1/\tau),\qquad \theta=\ln(1+y/z) \qquad (61)$$

перепишем формулу (52) в виде

$$B(y,z)=\frac{g}{y+z}+g^2\int_\theta^\infty\frac{s\ ds}{e^s-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^nz^n}{n!(n+1)!}\Big[s-\frac{y}{z}\frac{s}{e^s-1}\Big]^n\ . \qquad (62)$$

Представим выражение (62) как сумму пяти членов

$$B=\frac{g}{y+z}+\sum_{j=0}^{3}B_j\ , \qquad (63)$$

где

$$B_0(y,z)=g^2\int_0^\infty e^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^nz^ns^{n+1}}{n!(n+1)!}ds=g^2e^{gz}\ , \qquad (64)$$

$$B_1(y,z) = -g^2 \int_0^\theta e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n s^{n+1}}{n!(n+1)!} ds \ , \quad (65)$$

$$B_2(y,z) = g^2 \int_\theta^\infty \frac{s e^{-s}}{e^s - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n s^n}{n!(n+1)!} ds \ , \quad (66)$$

$$B_3(y,z) = g^2 \int_\theta^\infty \frac{s}{e^s - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n z^n}{n!(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!(-y/z)^k}{k!(n-k)!} \Big[\frac{s}{e^s-1}\Big]^k s^{n-k} ds \ . \quad (67)$$

Как будет показано ниже, главный вклад в (62) при больших z дает B_0. Покажем, что при больших z и $y \leq z$ справедлива оценка

$$B(y,z) = g^2 \exp\{gz\}[1 + O(\exp\{-gz/2\}) + O(\exp\{2\sqrt{gy} - gz\})] \ . \quad (68)$$

Используем очевидные неравенства

$$\theta \leq y/z \ , \quad e^{-s} \leq 1$$

для получения оценок

$$|B_1| < g^2 \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n \theta^{n+1}}{n!n!} = g^2 \theta^2 I_0(2\sqrt{gz\theta}) \leq g^2 \frac{y^2}{z^2} I_0(2\sqrt{gy}) \ . \quad (69)$$

Для грубой оценки B_2 используем неравенства

$$\frac{s}{e^s - 1} \leq (s+1)e^{-s} \leq 1 \quad (70)$$

и получим из (66)

$$|B_2| < g^2 \int_0^\infty (s+1) e^{-2s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n s^n}{n!(n+1)!} ds < g^2 \exp\{gz/2\}(\frac{1}{4} + \frac{1}{gz}) \ . \quad (71)$$

Из (70) следует, что для $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$[s/(e^s - 1)]^k \leq (s+1)e^{-s} \ . \quad (72)$$

Очевидно также, что при $n \geq 1$ выполнено неравенство

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-y/z)^k s^{n-k}| \leq (s + y/z)^n \ . \quad (73)$$

Подставляя (72) и (73) в (67), получим оценку

$$|B_3| < g^2 \int_0^\infty (s+1)^2 e^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n z^n (s + y/z)^n}{n!(n+1)!} ds <$$

$$< g^2 \exp\{2 + 2\frac{y}{z}\} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n (s + 1 + y/z)^{n+2}}{n!(n+1)!} \exp\{-2(s + 1 + \frac{y}{z})\} ds <$$

$$< g^2 \exp\{2 + 2\frac{y}{z}\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n z^n (n+2)}{n! 2^{n+3}} = \frac{g^2}{4} \exp\{\frac{gz}{2} + 2 + 2\frac{y}{z}\}[1 + \frac{gz}{4}] \ . \quad (74)$$

Справедливость оценки (68) следует из неравенств (69), (71), (74) и известной асимптотической формулы для функций Инфельда

$$I_n(\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{\sqrt{2\pi\zeta}}[1 + O(1/\zeta)] \ . \tag{75}$$

Итак, если выполняются условия

$$\exp\{gz/2\} \gg 1 \ , \quad \exp\{gz - 2\sqrt{gy}\} \gg 1 \ , \quad y \leq z \ , \tag{76}$$

справедлива простая формула

$$B(y, z) = g^2 \exp\{gz\} = g^2 \big(\frac{1}{\beta}\big)^g \ , \tag{77}$$

которую можно использовать для расчета $f_{NS}(x, Q^2)$.

Будем рассматриват θ и y/z в (63) как независимые переменные и положим временно $\theta = 0$. Тогда, подставляя формулу

$$(e^s - 1)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{-js\}$$

в (62), после некоторого пересуммирования мы получим ряд, каждый член которого пропорционален $\exp\{-ms\}$ с $m = 1, \ 2, \ \ldots$. После интегрирования по s мы получим ряд, каждый член которого будет пропорционален $\exp\{gz/m\}$. Формула (64) дает первый член этого ряда. Следующий член ($B^{(1)}$), отвечающий $m = 2$ дается соотношением

$$B^{(1)}(y, z) = \frac{g^2}{4}(1 - \frac{gy}{2}) \exp\{gz/2\} \ .$$

Если мы теперь вспомним, что $\theta \neq 0$ в (62), то получим поправки, которые, однако, не содержат экспоненциально больших факторов $\exp\{gz/m\}$. Следовательно, при вычислении поправок к (64) можно, не внося больших ошибок, положить в (62) $\theta = 0$, но нельзя в (62) вообще пренебречь отношением y/z.

Для расчета $f_{NS}(x, Q^2)$ при малых x подставим (77) в (7)

$$f_{NS}(x, Q^2) = g^2 x^{-g} \int_{\mu^2}^{S_m} \frac{dt}{t} \big(1 + \frac{t}{Q^2}\big)^{-g} = g^2 x^{-g} f_1 \tag{78}$$

с $S_m = Q^2/(4x)$. Вводя новую переменную интегрирования $\nu = t/Q^2$, мы получим очевидные равенства

$$f_1 = \int_{\mu^2/Q^2}^{1/4x} \frac{d\nu}{\nu(1+\nu)^g} =$$
$$= \int_{\mu^2/Q^2}^{1/4x} \frac{d\nu}{\nu}[(1+\nu)^{-g} - (1+\nu)^{-1}] + \int_{\mu^2/Q^2}^{1/4x} \frac{d\nu}{\nu(1+\nu)} =$$
$$= \int_{\mu^2/Q^2}^{1/4x} \frac{d\nu}{\nu}[(1+\nu)^{-g} - (1+\nu)^{-1}] + \ln(\frac{Q^2}{4x\mu^2}) - \ln[\frac{(1+1/4x)}{1+\mu^2/Q^2}] \; . \qquad (79)$$

Для малых x и μ^2/Q^2 можно вместо (79) использовать приближенное равенство

$$f_1 = \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu}[(1+\nu)^{-g} - (1+\nu)^{-1}] + \ln(Q^2/\mu^2) \; . \qquad (80)$$

Комбинируя формулу Дирихле [11]

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z}\right]\frac{dx}{x}$$

для логарифмической производной гамма-функции с (80) и вспоминая (78), приходим к окончательному выражению для несинглетной структурной функции свободного кварка при малом x для случая $\mu = \Lambda$

$$f_{NS}(x, Q^2) = g^2 x^{-g}[\ln(Q^2/\mu^2) - \psi(g) - \gamma_E] \; . \qquad (81)$$

Для логарифмической производной $f_{NS}(x, Q^2)$ имеем из (81) и (12)

$$\gamma = \frac{\partial \ln f_{NS}(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x)} = g = \frac{8}{33 - 2n_f} \; . \qquad (82)$$

Результаты численных расчетов $f_{NS}(x, Q^2)$ показаны на рис. 4. Вычисления, выполненные с помощью формул (33), (34), (35), (36) с $n_f = 4$, $\Lambda = 0,2$ ГэВ/с, $\mu = 0,201$ ГэВ/с, сравнивались с расчетом по формуле (81). Хотя для $x \geq 10^{-4}$ $gz/2 \leq 1,5$ и первое из условий (76) выполняется плохо, численные расчеты f_{NS} в области x и Q^2, доступной экспериментальному изучению на ep-коллайдере ГЕРА ($x \geq 10^{-4}$, $Q^2 \geq 300$ (ГэВ/с)^2), удивительно хорошо согласуются с формулой (81). Рисунок 5 показывает зависимость от x, μ, Q^2 величины γ, рассчитанной по формулам (33), (34), (35), (36). Из него видно, что при $\mu = \Lambda$ величина γ действительно очень слабо зависит от x и Q^2, как это и предсказывает формула (82) (при $n_f = 4$

$\gamma = 0,32$). Когда $\mu > \Lambda$, γ зависит как от x, так и от Q^2. Для $x \to 0$ γ стремится к некоторой константе γ_0, которая меньше значения, даваемого формулой (82). Из рис. 5 видно, что γ_0 уменьшается с ростом μ и приблизительно равно $0,22$ при $\mu = 1$ ГэВ/c. Увеличивая параметр обрезания μ, мы тем самым выбрасываем вклады $k_T \leq \mu$. Из сравнения кривых, показанных на рис. 5, следует важность вкладов малых k_T (≤ 1 ГэВ/c) в γ. Величина γ в формуле (82) получена при учете только пертурбативных вкладов. Непертурбативные эффекты должны вступать в действие при $k_T \leq 1$ ГэВ/c. Из сказанного ясно, что поскольку величина γ определяется не только большими k_T, то она должна зависеть от вклада непертурбативных эффектов и должна несколько отличаться от величины (82). Этот вопрос интересно было бы исследовать даже в какой-нибудь модели, описывающей непертурбативные эффекты, что выходит, однако, за рамки данной статьи. Хотя указанная проблема еще не изучена досконально, тем не менее разумно предположить, что γ даже при учете непертурбативных эффектов будет величиной не слишком отличающейся от g.

5 ВЫВОДЫ

Найдено точное аналитическое решение предложенного в [7] интегрального уравнения, позволяющего просуммировать все дважды логарифмические вклады в несинглетную структурную функцию свободного кварка. В случае произвольного параметра инфракрасного обрезания μ решение выражается в виде обратного преобразования Лапласа отношения функций Уиттекера и экспонент (формулы (33), (34), (35), (36)). Для частного решения при $\mu = \Lambda$ получена простая асимптотическая формула (81). Она описывает поведение при малых x несинглетной структурной функции $f_{NS}(x, Q^2)$ и справедлива при выполнении условия (76). Величина логарифмической производной по $\ln(1/x)$ структурной функции $f_{NS}(x, Q^2)$ в пертурбативной КХД при $\mu = \Lambda$ равна $8/(33 - 2n_f)$, но она должна зависеть от вклада непертурбативных эффектов. Эту зависимость интересно было бы исследовать даже в рамках какой-нибудь модели непертурбативных эффектов.

Приношу искреннюю благодарность М.Г.Рыскину за постоянный интерес к этой работе и конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибов В. Н., Липатов Л. Н. // ЯФ. 1972. Т.15. С.781;
1972. Т.15. С.1218.
2. Altarelli G. and Parisi G. // *Nucl. Phys.* 1977. **V.126** P.297.
3. Докшицер Ю. Л. // ЖЭТФ. 1977. Т.73. С.1216.
4. Судаков В. В. // ЖЭТФ. 1956. Т.30. С.87.
5. Горшков В. Г., Грибов В. Н., Липатов Л. Н., Фролов. Г. В. // ЯФ. 1967. Т.6. С.129.
6. Горшков В. Г. // УФН. 1973. Т.110. С.45.
7. Ermolaev B. I., Manayenkov S. I., Ryskin M. G. // *Z.Phys.* 1996. **V.C69** P.259.
8. Kirschner R. and Lipatov L. N. // *Nucl. Phys.* 1983. **V.B213** P.122.
9. Politzer H. D. // *Phys. Rev. Lett.* 1973. **V.30** P.1346;
Phys. Rep. 1974. **V.14C** P.129.
10.Gross D. J., Wilczek F. // *Phys. Rev. Lett.* 1973. **V.30** P.1343;
Phys. Rev. 1973. **V.D8** P.3633.
11. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of Modern Analysis, Cambridge, 1927. Пер. с англ. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
12.Reya E. // *Phys. Rep.* 1981. **V.69** P.196.

Подписи к рисункам

Рис. 1. Лестничная диаграмма для $f_{NS}(x, Q^2)$. Сплошные кривые отвечают кварковым линиям, волнистые - глюонным, а пунктирные - фотонным. Крестиками помечены частицы на массовой поверхности.

Рис. 2. Интегральное уравнение для $A(t, \beta)$.

Рис. 3. Контуры интегрирования в комплексной плоскости ρ.

Рис. 4. Отношение несинглетных структурных функций, рассчитанных по формулам (33), (34), (35), (36) с $\Lambda = 0.2$ ГэВ/с, $\mu = 0.201$ ГэВ/с, $n_f = 4$ и по асимптотической формуле (81).

Рис. 5. Зависимость $\gamma = \partial \ln[f_{NS}(x, Q^2)]/\partial \ln(1/x)$ от x, μ и Q^2 . Кривые расчитаны с теми же значениями Λ, μ , n_f и Q^2, как и на рис. 4.