

Non-perturbative QCD

Виктор Петров

Семинар ОФВЭ-ОТФ (2)

15 апреля 2021 г



Эффективный киральный лагранжиан (ЭКЛ)

ЭКЛ — это **низкоэнергетический эффективный лагранжиан** в КХД. При очень низких энергиях остаются только **π -мезоны**.

Лагранжиан пишется для матрицы из $SU(3)$ -группы

$$U = e^{\frac{i}{F_\pi} \pi^a(x) \lambda^a}$$

$\pi^a(x)$ — поля октета π -мезонов.

Киральная инвариантность требует, чтобы ЭКЛ был инвариантен относительно преобразований

$$U(x) \longrightarrow SU(x)S^+$$

с **постоянной** матрицей. Поэтому ЭКЛ содержит члены только с производными.

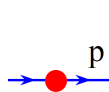


Эффективный киральный лагранжиан (ЭКЛ)

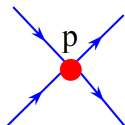
ЭКЛ пишется как разложение в ряд по производным инвариантное относительно кирального преобразования

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{4} \int d^3x \text{Tr} [\partial_\mu U(x) \partial_\mu U^\dagger(x)] + \dots$$

Сколько членов — столько констант.



A



B

Киральная инвариантность связывает поправку к функции Грина A и амплитуду рассеяния B при малых p^2 .

Каждая вершина ЭКЛ пропорциональна числу цветов N_c .

В следующем порядке по $1/N_c$ возникают поправки к вершинам.

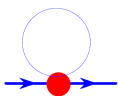
Все они как минимум **квадратично расходятся**.



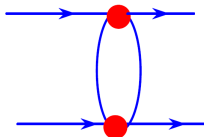
(ЭКЛ) Киральная теория возмущений

Киральная теория возмущений (эффективная теория поля) состоит в следующем.

1. Вычисляем физическую величину в главном порядке.
2. Вычисляем поправку к ней в первой петле. Эта поправка перенормирует голую константу и как правило квадратично расходится (неперенормируемая теория). Мы определяем теперь голую константу из условия, что с поправкой константа равна экспериментальному значению.



A



B

Поправки к функции Грина и амплитуде рассеяния по $O(1/N_c)$.

Но учитывается **только** наиболее инфракрасно расходящаяся часть (**размерная** регуляризация).



(ЭКЛ) Член Весса-Зумино

Все члены ЭКЛ содержат только вершины с **четным числом** π -мезонов = дополнительная $U(1)$ симметрия. Но **Адлеровская аномалия!**

Члены с нечетными вершинами можно вычислить прямо из КХД (Весс, Зумино, 1978)

$$S_{WZ} = \frac{iN_c}{96\pi^2} \int d^5x \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_5} \text{Tr} [L_{\mu_1} \dots L_{\mu_5}] \quad L_\mu = iU^+ \partial_\mu U$$

— **полная производная**. Нелокальное 4мерное действие. Явное выражение для стационарной $SU(3)$ -конфигурации

$$S_{WZ} = T \partial_i K_i, \quad K_0 = Q_t = \frac{N_c}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \text{Tr} [L_{i_1} L_{i_2} L_{i_3}]$$

Q_t — **целый топологический заряд**.



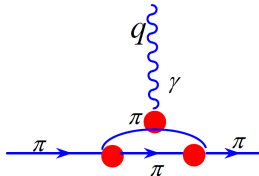
(ЭКЛ) Число цветов против массы кварка


ЭКЛ содержит 2 малых параметра — токовую массу кварка $m_s \ll m_{\text{strong}}$ и обратное число цветов $1/N_c$, которые **конкурируют** между собой. Киральная т.в. учитывает наиболее сингулярные члены по m_s .

Обычно N_c работает лучше! Пример — **расщепление аксиальных констант**

$$\frac{F_K^2}{F_\pi^2} = \frac{c_1}{N_c} m_s^2 \log m_s^2 + c_2 m_s^2$$

Из 0.4 первый член (киральная т.в.) дает 0.08, а второй 0.32! Сингулярности бывают не только логарифмические.



Сингулярная диаграмма — вклад в изовекторный форм-фактор нуклона. Вклад $\sim 1/m_s$ 

ЭКЛ из инстантонного вакуума

Существование **2х масштабов** дает возможность построить ЭКЛ в широкой области импульсов $p < \rho^{-1}$. В нем должно быть **два** поля — октет π -мезонов и конstituентные кварки ψ :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\hat{\partial} + iMe^{i\pi\gamma_5/F_\pi} \right) \psi, \quad \pi = \pi^a \lambda_a$$

Интегрируя по полям кварков, получим **наш ЭКЛ** (1988)

$$\text{ECL} = \mathfrak{D}et \left(i\hat{\partial} + iMe^{i\pi\gamma_5/F_\pi} \right)$$

Этот ЭКЛ, содержит все степени градиентов, член Весса-Зумино. Предсказания можно сравнит с экспериментом. Два члена с 4мя градиентами

$$\text{ECL}^{(4)} = l_1 \text{Tr} (L_\mu L_\nu)^2 - l_2 \text{Tr} (L_\mu L_\mu L_\nu L_\nu)$$



ЭКЛ из инстантонного вакуума

Мы имеем

$$l_2 = 1.54 \cdot 10^{-3}(1.35 \pm 0.3), \quad l_1 = -3.16 \cdot 10^{-3}(-3.5 \pm 1.1)$$

Экспериментальные данные из d -волны в $\pi\pi$ -рассеянии.
хорошее согласие!



Киральная теория барионов

Теорема (Witten, 1978)

- Барионы можно описать как **солитоны мезонного поля**. Флуктуации мезонного поля подавлены как N_c . Массы барионов N_c .
- Ширины барионов $O(1)$ — подавлены по сравнению с массами
- Взаимодействие барионов $\sim O(N_c)$ велико
- Мезоны остаются **квантовыми частицами** при $N_c \rightarrow \infty$. Барионы — тяжелые **квазиклассические** объекты.

Нахождение солитона есть аналог метода **среднего поля**, а используемые приближения такие же как в **атоме Томаса-Ферми**.



Киральная теория барионов. Модели

Идея **нуклона-солитона** была реализована в

- 1 Наивная кварковая модель при $N_c \rightarrow \infty$. Частицы — конституентные кварки. Аналог приближения **Хартри-Фока**
- 2 Модель Скирма. Частицы — π -мезоны. Лагранжиан Скирма+ Весс-Зумино.
- 3 **Киральная теория барионов** (χ QSM). Частицы — π -мезоны и конституентные кварки. Лагранжиан, выведенный из инстантонного вакуума



Кварковая модель.

Кварковая модель основана на идее симметричного самосогласованного поля: $SU(6) = SU(3)_{\text{flavor}} \otimes SU(2)_{\text{spin}}$ Имеет 56-плет (октет спин 1/2, декуплет спин 3/2) с четностью плюс и первый возбужденное состояние 70-плет с четностью минус. Это был большой успех кварковой модели.

Но второе возбужденное состояние (четность плюс) описывается полностью неправильно. Должно быть два 56-плета, 70-плет, 20 плет. Ничего этого нет!

- Беда в **неверной центральной симметрии** кварковой модели, приводящей к $SU(6)$!



Модель Скирма.

Основана на лагранжиане

$$\mathcal{L}_{\text{Skyrme}} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} (L_\mu L_\mu) + \frac{1}{e^2} \text{Tr} ([L_\mu, L_\nu]^2) + WZ$$

Без второго члена сжимается в точку. Второй член изображает все градиенты. Он противоречит эксперименту по величине и **знаку**.

Ищем солитон с топологическим зарядом $Q_t = 1$. Его можно отождествить с барионным зарядом $B = Q_t$ (Witten, 1984). Самосогласованное поле только в группе $SU(2)$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^a \tau^a & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad \pi^a = n^a P(r)$$

Топологический заряд выражается через профиль

$$Q_t = \frac{1}{\pi} [P(0) - P(\infty) - (\sin P(0) - \sin P(\infty))]$$

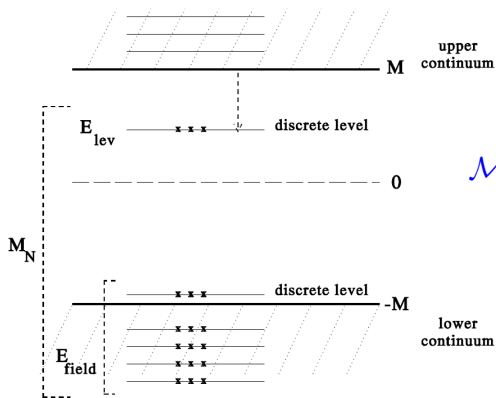
Киральная теория барионов. χ QSM.

Модель Скирма очень грубая, точность $\sim 50\%$

- Наша теория занимает промежуточное положение между кварковой моделью и моделью Скирма — они ее **предельные случаи**. Точность 10% ($O(1/N_c^2)$)
- Возьмем самосогласованное поле с $Q_t = 1$ и начнем увеличивать его размер. Энергия его увеличивается с размером.
- При некотором размере появляется дискретный уровень из верхнего континуума, который идет вниз. Заполним **валентными** кварками. Энергия поля растет, энергия валентных кварков уменьшается.
- **Локальный минимум** = нуклон



Киральная теория барионов. χ QSM.



$$\mathcal{M}_N = \min[E_{\text{field}} + N_c E_{\text{level}}]$$

$$\mathcal{M}_N \sim \mathcal{O}(N_c)$$

Получаем $\mathcal{M}_N \approx 1200 \text{ MeV}$ (центр октета).

$E_{\text{valence}} = 570 \text{ MeV}$, $E_{\text{field}} = 630 \text{ MeV}$. Нуклон — СИЛЬНО СВЯЗАН

Киральная теория барионов. χ QSM.

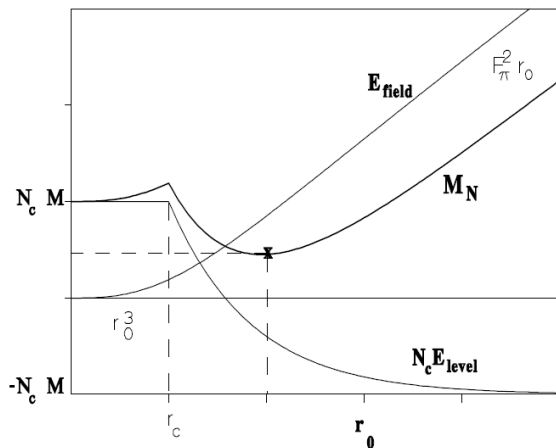


Рис. 3.3: Энергия N_c кварков в пионном поле, энергия поля и масса нуклона как функция размера поля r_0 . Величина r_c есть критический размер, при котором впервые появляется уровень. Крестиком отмечен минимум энергии, отвечающий нуклону



Киральная теория. Характеристики нуклона.

Работа над теорией нуклона заняла у нас много лет. В ней принимали участие наши бывшие студенты – П. Побылица и М. Поляков, в 1988 году к нам также присоединилась группа из Бохума (Германия), возглавляемая профессором К. Гоеке.

- Были определены все основные характеристики нуклона: масса, Σ -член, электромагнитные и аксиальные формфакторы, константы связи с мезонами.
- Обобщив теорию на случай $SU(3)$ флэйворной группы, мы вычислили расщепления в двух основных барионных мультиплетах: нуклонном октете и декуплете, содержащем Δ -резонанс (некоторые примеры – см. табл. 1). Все статические величины нуклона описывались довольно хорошо, точность теории оказалась где-то на уровне 10–15 %.



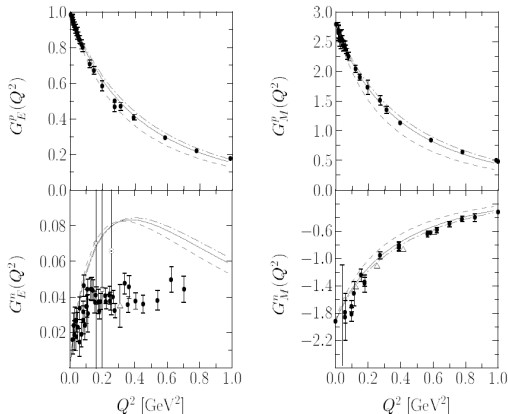
Киральная теория. Характеристики нуклона.

Таблица: Поведение по N_c характеристик нуклона

Теор.		Эксп.	
Σ -член	54 МэВ	N_c	45–60
g_a	1.31	N_c	1.25
$g_{\pi N \Delta}$	$3/2 g_{\pi NN}$	$N_c^{3/2}$	
$\mu_p - \mu_n$	5.2	N_c^2	4.71
$\frac{\mu_{\Delta N}}{\mu_p - \mu_n}$	0.70	1	0.71 ± 0.1



Киральная теория. Характеристики нуклона.



Электромагнитные форм-факторы нуклона

Киральная теория. Жесткие процессы.

Более важно, чем совпадение цифр, было то, что мы имели дело с **последовательной релятивистской теорией поля**.

Поэтому можно ставить такие вопросы, которые, в принципе, нельзя поставить ни в кварковой модели, ни в модели Скирма.

- Структурных функции нуклона
- Волновые функции на световом конусе Вероятность обнаружения 5 или 7 кварков в нуклоне и т. д. и т. п.
- Off-forward партонные распределения

χ QSM — единственная теоретическая модель, в которой можно описать **жесткие процессы** с нуклоном.



Киральная теория. Жесткие процессы.

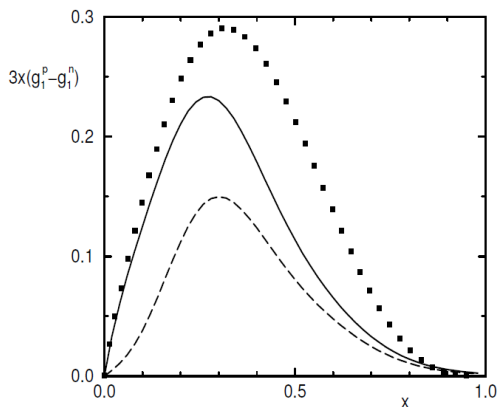


Рис. 7.4: Изовекторная поляризованная структурная функция, $x[\Delta u(x) - \Delta d(x) + \Delta u(x) - \Delta d(x)]/2$. Пунктирная линия: регуляризованный вклад дискретного уровня; сплошная линия: сумма вкладов дискретного уровня и Дираковского подвала сосчитанная по выражению (7.112); точки: параметризация работы [214]



Киральная теория. Жесткие процессы.

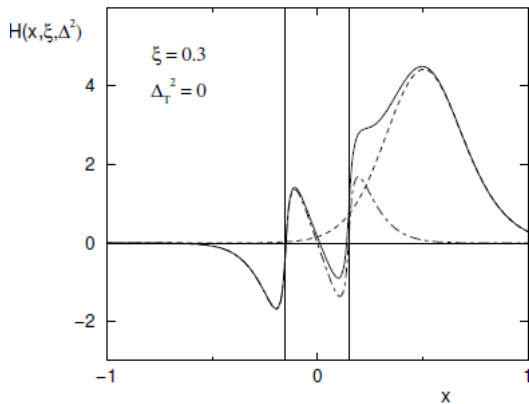


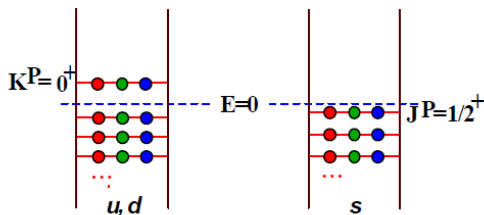
Рис. 8.3: Предсказание для изоинглетного off-forward распределения: $H(x, \xi, \Delta^2)$ для $\Delta_T^2 = 0$, где $\Delta_T^2 \equiv -\Delta^2 - \xi^2 M_N^2$ и $\xi = 0.3$. Пунктирная линия: вклад дискретного уровня. Штрих-пунктирная линия: вклад Дираковского подвала. Сплошная линия: полное распределение. Вертикальные линии показывают положение точек: $x = \pm \xi/2$.



Вращения. Квантовые числа барионов.

- Самосогласованные мезонные поля имеют **ежовую симметрию**
- Сохраняется — **grand spin**

$$\tilde{K} = \tilde{J} + \tilde{T}$$



- Солитон допускает **вращения** в **обычном и изотопическом** пространстве.



Вращения. Квантовые числа барионов.

- **Коллективный** гамильтониан (симметрический волчок)

$$M = \mathcal{M}_{sol} + \frac{J(J+1)}{2I_1} + \frac{C_2(p, q) - J(J+1) - 3/4(Y')^2}{2I_2}$$

- **Правило квантования Виттена**

$$Y' = \frac{N_c}{3}$$

- **Момент инерции** I_1 — сумма по уровням.

$$I_1 \sim \sum_{n,m} \frac{\langle n | \tau^a | m \rangle \langle m | \tau^a | n \rangle}{E_n - E_m}$$

- Изоспин body-frame = spin $J = \tilde{T}$

Квантование среднего поля

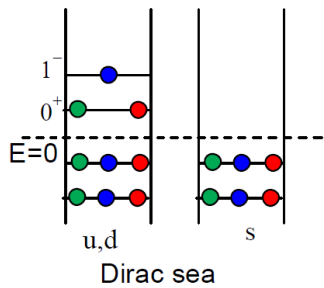
Возбужденные барионы (D.Diakonov, A.Vladimirov +V.P., 2013)

Барионные резонансы ниже 2 GEV — **1-кварковые** возбуждения в среднем поле

Grand spin multiplets

$$J = K - \tilde{T} \dots \tilde{T} + K$$

Энергии



$$E = \mathcal{M}_{sol} + \Delta \epsilon_{lev} + \frac{(1 - a_K) \tilde{T}(\tilde{T} + 1) + (1 - a_K) J(J + 1)}{2I_1}$$

Барионные резонансы легче 2 GeV

quark levels	rotational bands	$(I_1)^{-1}$, MeV	\bar{a}_K
$K^P = 0^+$, ground state	(8, 1/2 ⁺ , 1152) (10, 3/2 ⁺ , 1382)	153	
$0^+ \rightarrow 0^+$ 482 MeV	(8, 1/2 ⁺ , 1608) (10, 3/2 ⁺ , 1732)	83	
$0^+ \rightarrow 2^+$ 722 MeV	(8, 3/2 ⁺ , 1865) (8, 5/2 ⁺ , 1873) (10, 3/2 ⁺ , 2087) (10, 5/2 ⁺ , 2071) (10, 7/2 ⁺ , 2038)	131	-0.050
$0^+ \rightarrow 1^+$ ~780 MeV	$N(1/2^+, 1710)$ $N(3/2^+, 1900)$ $\Delta(1/2^+, 1910)$ $\Delta(3/2^+, \sim 1945)?$ $\Delta(5/2^+, 2000)$		
$0^+ \rightarrow 1^-$ 468 MeV	(8, 1/2 ⁻ , 1592) (8, 3/2 ⁻ , 1673) (10, 1/2 ⁻ , 1758) (10, 3/2 ⁻ , 1850)	171	0.336
$0^+ \rightarrow 0^-$ 563 MeV	(8, 1/2 ⁻ , 1716)	155(fit)	
$0^+ \rightarrow 2^-$ 730 MeV	(8, 3/2 ⁻ , 1896) (8, 5/2 ⁻ , 1801)	155(fit)	-0.244

TABLE I: Interpretation of all baryon resonances below 2 GeV, as rotational excitations on top of

Барионные резонансы легче 2 GeV

Одночастичные возбуждения объясняют **все** мультиплеты и не содержат **missing states**.

Предел $N_c \rightarrow \infty$ работает **гораздо лучше** кварковой модели.

Он позволяет также вычислить сечение πN -рассеяния.

π -мезон — квантовое поле. Амплитуда $\sim O(1)$.



πN рассеяние

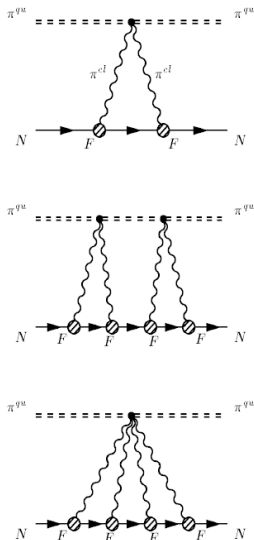


Рис. 4.3: Примеры диаграмм, дающих вклад в пион-нуклонное рассеяние

NN потенциал

Октет барионов, декуплет Δ -резонансов ... суть квантовые вращательные состояния **обобщенного нуклона**, т.е. солитона с некоторой **матрицей ориентации** O^{ab} .

Потенциал взаимодействия 2х нуклонов лучше писать как функцию матрицы относительной ориентации $O_1 O_2^{-1}$. Тогда каждая диаграмма взаимодействия 2х обобщенных нуклонов содержит в себе множество разных диаграмм в потенциале и отвечает не только NN но и $N\Delta$ и $\Delta\Delta$ потенциалам. Поправки к этой картине $\sim O(1/N_c)$.

NN -потенциал есть $O(N_c)$. Диаграммы для него содержат множество сокращений. Все они автоматически происходят в нашей теории.

Ядерная материя? Скирмионный кристалл? (Дьяконов, Мирлин, 1988)



NN потенциал

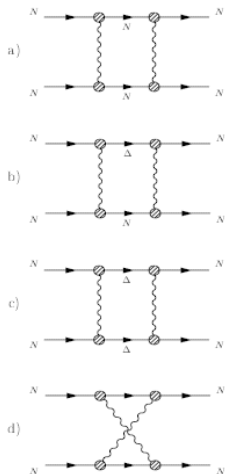


Рис. 4.5: Вок-диаграммы для нуклон-нуклонного рассеяния: *a)* — диаграмма, которая не дает вклада в нуклон-нуклонный потенциал (итерация борновского графика); *b), c)* — диаграммы, которые следует учитывать при вычислении нуклон-нуклонного потенциала, но которые не дают вклада в *обобщенный* потенциал; *d)* — диаграмма, которую сле-

Экзотический антидекуплет. Струна?

Следующее вращательное состояние есть **экзотический антидекуплет** (Witten, Дьяконов + В.П., 1984).

Мы не относились к нему серьезно, так как считали что там уже начинается переход в режим Редже-траекторий. В 1989 мы построили из нашего ЭКЛ струну и получили линейные (асимптотически) Редже траектории.

Мы поняли, что не нужно иметь классического решения со струной в ЭКЛ. Для струны важна **как можно меньшая ширина** распада. Для этого нужен объект, который вращается медленнее всего! ($\Gamma \sim \omega^4$) Таковым является струна
Мы нашли очень грубо струну из первого члена ЭКЛ и получили

$$\alpha' = \frac{1}{8\pi^2 F_\pi^2} \approx 1.45 \text{ GeV}^{-2} (1.1)$$



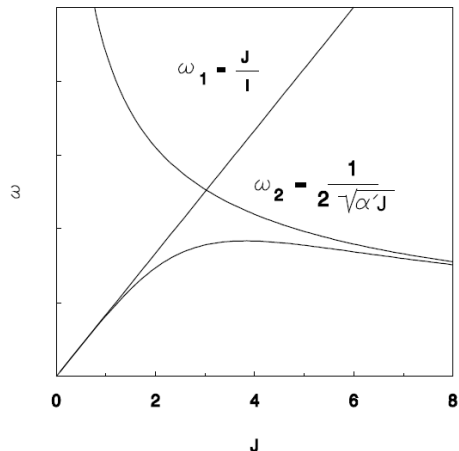


Рис. 5.7: Зависимость угловой частоты ω вращающегося кирального солитона от его момента J . Кривые $\omega_{1,2}$ есть два режима, отвечающие малым и большим J соответственно. Сплошная линия отвечает возможной интерполяции между двумя режимами.



Экзотический антидекуплет.

- Масса легкой частицы из антидекуплета Θ^+ получалась 1530 МэВ.
- Имеет малую ширину. Если вычислять ее в системе бесконечного импульса, то она связана с малой долей (не более 20%) 5кварковой компоненты в нуклоне. Последняя оценка $\Gamma \sim 1$ МэВ.

