

Non-perturbative QCD

Виктор Петров

Семинар ОФВЭ-ОТФ

8 апреля 2021 г

Что такое "непертурбативная КХД"

Пертурбативная КХД — это разложение по константе связи $g \ll 1$:

$$\mathfrak{G} = 1 + c_2 g^2 + c_4 g^4 + \dots$$

Между тем мы знаем, что любая размерная величина должна выражаться через **ренорм-инвариантное обрезание**

$$\Lambda^4 = \text{const} \cdot M^4 \cdot e^{-\frac{2\pi}{b_1 \alpha_s(M)}} \left(\frac{2\pi}{\alpha_s(M)} \right)^{b_2/b_1} (1 + \dots) \quad (1)$$

Выражение такого типа нельзя получить **ни в каком порядке** теории возмущений. Они — **непертурбативные**.

Любая величина в КХД пропорциональна степени Λ

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \text{const} \cdot \Lambda^{\mathfrak{s}}$$

где \mathfrak{s} — ее размерность.



Функциональный интеграл

В КХД недостаточен обычный подход, основанный на диаграммах Фейнмана.

Полная квантовая теория поля основана на функциональном интеграле.

$$K(\vec{x}_{fin}, t_{fin}; \vec{x}_{in}, t_{in}) = \sum_{all\ paths} e^{iS/\hbar}$$

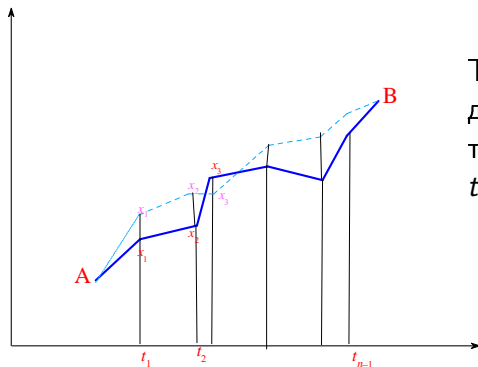
K — амплитуда вероятности перехода из начальной в конечную точку, матричный элемент оператора эволюции

$$K(\vec{x}_{fin}, t_{fin}; \vec{x}_{in}, t_{in}) = \langle fin | e^{-i\mathcal{H}(t_{fin}-t_{in})} | in \rangle$$

S — действие на данном пути. В квантовой механике пути — траектории частицы.



Интеграл по траекториям в квантовой механике



Траектория определяется координатами x_1, \dots, x_n в последовательные моменты времени $t_n = t_A + n\delta$. Сумма по путям

$$\int dx_1 \dots dx_n \equiv \int Dx(t)$$

Многочастный интеграл можно взять и на компьютере.
Матричный элемент оператора эволюции:

$$\langle \text{fin} | e^{-i\mathcal{H}(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}})} | \text{in} \rangle = \sum_n \Psi_n(x_{\text{fin}}) e^{-i\varepsilon_n(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}})} \Psi_n^\dagger(x_{\text{in}})$$

Значит можно вычислить **волновые функции** $\Psi(x)$.

Функциональный интеграл в теории поля

Поле — функция, заданная в любой точке пространства - времени. Поле может быть скалярным φ , векторным A_μ , тензорным $F_{\mu\nu}$. Может нести **внутренние значки** (глюон A^a_μ).
Формула точно такая же

$$\langle \text{fin} | e^{-i\mathcal{H}(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}})} | \text{in} \rangle = \int_{\varphi_{\text{in}}}^{\varphi = \varphi_{\text{fin}}} D\varphi e^{i\mathcal{S}[\varphi]}$$

Событие — данное $\varphi(\vec{x})$ реализовалось во всем пространстве.
Координата — значение поля, \vec{x} — номер координаты.

Бесконечное число степеней свободы!

Интеграл в **функциональном пространстве**.



Статистическая сумма

Пусть $\varphi_{\text{in}}(x) = \varphi_{\text{fin}}(x) = \varphi(x)$. Возьмем также интеграл по $\varphi(x)$ и используем формулу для оператора эволюции

$$\mathcal{Z} = \int_{\text{all closed paths}} D\varphi e^{iS[\varphi]} = \sum_n e^{-i\varepsilon_n(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}})}$$

— **статистическая сумма** теории.

С помощью статсуммы можно вычислить все **уровни энергии**.
Энергия основного состояния (вакуума)

$$\varepsilon_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{i}{(t_{\text{fin}} - t_{\text{in}})} \log \mathcal{Z}$$

Средние по вакууму

$$\langle F[\varphi(x)] \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int D\varphi F[\varphi] e^{iS[\varphi]}$$



Статистическая сумма и статистическая физика

Статфизика определяется суммой ($\beta = 1/T$, T —температура)

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta E_n} \equiv e^{-\beta \mathcal{F}(\beta)}$$

E_n — уровни энергии системы в термостате.

\mathcal{F} — **свободная энергия**, определяющая термодинамические величины.

$$\mathcal{Z} = \int_{\text{all closed paths}} D\varphi e^{-\int_0^\beta dt \mathcal{L}[\varphi]}$$

(\mathcal{L} — лагранжиан системы).

Итак, функциональный интеграл определяет не только квантовую механику и теорию поля, но и статистическую физику.



Частицы

Волновые функции в терминах частиц получаются так (комплексный скаляр):

- 1) Разобьем начальную и конечную конфигурацию на положительно- ($a(p), b(p)$) и отрицательно-частотные части ($a^+(p), b^+(p)$)

$$\varphi(x) = \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2p_0}} [a(p)e^{ipx} + b^+(p)e^{-ipx}]$$

- 2) Найдем функциональный интеграл с **граничными условиями Фейнмана**:

- a) При $t = t_{in}$ задана положительно частотная часть $a(p)$.
- b) При $t = t_{fin}$ задана отрицательно частотная часть $b^+(p)$.
- 3) Факторизуем результат согласно

$$S = \sum_n \Psi_n(a^+, b^+) \Psi_n^*(a, b) e^{-i\varepsilon_n(t_{fin} - t_{in})}$$



Частицы

$$\Psi[\dots] = \int \frac{dp}{2\pi} f_1(p) a^+(p) + \int \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} f_3(p_1, p_2, p_3) a^+(p_1) a^+(p_2) b^+(p_3)$$

Волновая ф-ция = **Фоковский столбец**, $f_1(p)$ амплитуда найти 1 голую частицу с импульсом p , f_3 - амплитуда вероятности еще пары.

Оператор эволюции дает также амплитуду перехода из 2х частиц с импульсами p_1, p_2 в 2 частицы с импульсами p'_1, p'_2 ,

$$\langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle = \langle a(p'_1) b(p'_2) | e^{-i\mathcal{H}T} | a^+(p_1) b^+(p_2) \rangle$$

т.е. позволяет найти **матрицу рассеяния**. Любой ее элемент, — упругий, с рождением, распадом.

Однако, обычно используется **LSZ формула**



LSZ формула

Чтобы вычислить амплитуду рассеяния надо

1. Вычислить функцию Грина

$$G(x_4, x_3, t_{\text{fin}}; x_1, x_2, t_{\text{in}}) = \langle\langle \varphi(x_3, t_{\text{fin}}) \varphi(x_4, t_{\text{fin}}) \varphi(x_1, t_{\text{in}}) \varphi(x_2, t_{\text{in}}) \rangle\rangle$$

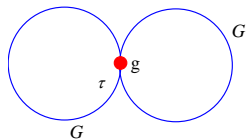
— среднее по **вакуумному состоянию**

2. Поместить внешние концы на массовую поверхность, а затем ампутировать их, заменив на волновые функции реальных частиц.



Диаграммы Фейнмана

Для вычисления функции Грина можно использовать диаграммы.



Диаграммы Фейнмана

- **Линии:** $G(\tau_1 - \tau_2)$
- **Вершины:** g
- Коэффициенты включают $1/n$ от логарифма



Диаграммы Фейнмана

Затравочная функция Грина $G(\tau_1 - \tau_2)$ есть обратная квадратичная форма W :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi W \varphi + \dots = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi [(\partial_t \varphi)^2 - (\partial_x \varphi)^2 - m^2 \varphi^2] + \dots$$

то есть

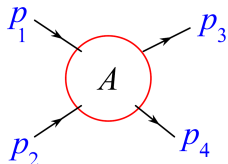
$$G = W^{-1} = \frac{1}{m^2 - p_\mu^2 + i\delta}$$

и мы возвращаемся к обычному способу изложению. Он полностью **выводится** из функционального интеграла



Переменные Манделстама

Упругую амплитуду 2->2 удобно описывать через переменные Манделстама



$$s = (p_1 + p_2)^2$$

энергия в с.ц.м.

$$t = (p_1 - p_3)^2$$

переданный импульс

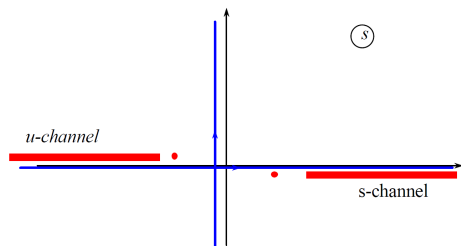
$$u = (p_1 - p_4)^2$$

переданный импульс в кросс-канале

Переменные Манделстама не независимы

$$s + t + u = \sum m_i^2$$

Особенности амплитуды



Причинность: не должно быть особенностей в правой верхней части. Особенности в левой полуплоскости обусловлены кросс-каналом u . Контур интегрирования должен обходить особенности — **правило обхода Фейнмана**

Продолжение амплитуды на всю комплексную плоскость s

$$A(s) = \int_R \frac{ds'}{s - s'} \Delta A(s') + \int_L \frac{ds'}{s - s'} \Delta A(s')$$

дисперсионное соотношение Мандельштама



Продолжение в Евклид

Функциональный интеграл в статфизике гораздо лучше, чем в квантовой теории, поскольку не осциллирует и есть **сумма положительных вкладов**.

Однако, зная структуру особенностей можно повернуть контур интегрирования на мнимую ось, не задевая особенностей. Это аналитическое продолжение называется евклидов разворот

$$t = -i\tau, \quad \dot{\varphi} = i\partial_\tau\varphi$$

Тогда функциональный интеграл превращается в

$$\mathcal{Z} = \int D\varphi(\vec{x}, \tau) e^{-\int dt \mathcal{L}_E[\varphi]}$$

Евклидов лагранжиан

$$\mathcal{L}_E[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_\tau\varphi)^2 + V[\varphi]]$$

то есть потенциал **меняет знак**.



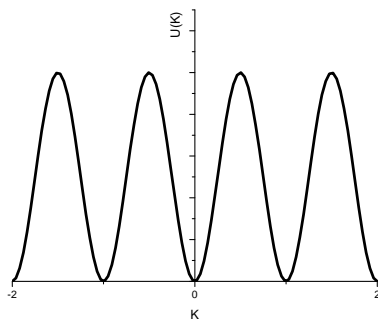
Симметрии КХД и сохраняющиеся токи

Трансляции	$T_{\mu\nu}$	Импульс P , энергия E
Лоренца $SO(3, 1)$	$M_{\nu\rho}^{\mu} = x_{\rho} T_{\nu}^{\mu} - x_{\nu} T_{\rho}^{\mu}$	Спин частицы
Дилатации	$D^{\mu} = x^{\nu} T_{\nu}^{\mu}$	Квантовая аномалия $\partial_{\mu} D^{\mu} = \frac{b}{4} \frac{G_{\mu\nu}^2}{32\pi^2}$
Флэйворная $SU_R(N_f) \otimes SU_L(N_f)$	$j_{\mu}^a = \bar{\psi} \Gamma \gamma_{\mu} \tau^a \psi$	Спонтанно нарушена до $SU_V(N_f)$
Флэйворный синглет	$j_{\mu}^5 = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi$	Квантовая аномалия $\partial_{\mu} j_{\mu}^5 = \frac{G\tilde{G}}{32\pi^2}$

Теорема Нетер гарантирует сохранение **классического тока**. Квантовые поправки могут его разрушить. Это очевидно для дилатационной аномалии - в теории появляется масштаб



Потенциальная энергия в теории Янга-Миллса



— **периодическая функция** топологического заряда

$$Q_t = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} G_{\mu\nu} G_{\rho\lambda}.$$



$U(1)$ –проблема

Спонтанное нарушение **киральной симметрии** приводит к появлению октета безмассовых голдстоунов (π, K, \bar{K}, η). Однако 9-й голдстоун η' — тяжелый (958 МэВ), хотя симметрия $SU(3) \otimes U(1)$. Это называется **$U(1)$ –проблема**.

Синглетный ток не сохраняется, Адлеровская аномалия

$$\partial_\mu j_\mu^5 = \frac{G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\rho\lambda}}{32\pi^2}$$

Поэтому теорема Голдстоуна для синглетного тока может быть нарушена. Однако для того, чтобы это нарушение сработало, необходимо, чтобы в вакууме существовали флуктуации глюонного поля с ненулевым топологическим зарядом.

Но плотность топ.заряда – полная производная

$$\partial_\mu K_\mu = \frac{G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\rho\lambda}}{32\pi^2}, \quad K_0 \equiv K = \varepsilon_{ijk} \int d^3x \left[A_i \partial_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k \right]$$

$U(1)$ -проблема

(гамильтонова калибровка: $A_0 = 0$). Сохраняется суммарный ток

$$\partial_\mu (J_\mu^5 + K_\mu) = 0$$

Заряд K инвариантен относительно обычных калибр.преобразований, но меняется на **целое число** при больших (оставляют A_i , но не убывают на бесконечности) Нужны флуктуации с ненулевым топ.зарядом. Только они дают особый духовый полюс в корреляторе топ.зарядов, который смешивается с затравочным голдстоуном и дает η' мезон. Используя этот механизм Виттен и Венециано получили

$$m_{\eta'}^2 = 4N_f \frac{\langle Q_t Q_t \rangle}{F_\pi^2}$$

($\langle Q_t Q_t \rangle$ в мире без легких кварков). Для этого барьер должен быть **проницаем**.



Инстантон

Траектория с конечным действием в Евклиде, отвечающая туннелированию есть инстантон (В.Н.Грибов)

$$(A'_\mu)^a = O^{ab} \frac{\eta_{\mu\nu}^b (x - z)_\nu}{(x - z)^2 + \rho^2}$$

z — центр инстантона (трансляция), 4 коллективные координаты

ρ — размер инстантона (дилатация), 1 коллективная координата

O^{ab} — матрица ориентации инстантона $4N_c - 5$ коллективных координат
Всего $4N_c$ коллективных координат.

Инстантон найден Белавиным, Поляковым, Шварцем, Тюткиным исходя из неравенства Богомольного

$$\int d^4x \frac{G_{\mu\nu}^2}{32\pi^2} \geq Q_t$$

Инстантон — минимум при данном $Q_t = 1$.



Инстантонный вакуум

Вклад одного инстантона в статсумму вычислен t' Hooft

$$\mu_1(\rho) = C_{N_c} \frac{e^{-\frac{8\pi^2}{bg^2(\rho)}}}{\rho^5}$$

вклад в статсумму одного инстантона

$$\mathcal{Z}_I = \int d^4z \int d\rho \mu_1(\rho)$$

Однако, в вакууме имеется **термодинамически много** инстантонов и антиинстантонов.

Мы (Diakonov + V.P., 1984) применили к данной задаче **вариационный принцип Фейнмана**, предварительно проверив в квантовой механике и убедившись, что он дает очень хорошую **точность**.

Инстантонный вакуум. Статфизика

Мы выбрали простейший Анзац в виде суммы

$$A_\mu^a = \sum_I A^I + \sum_{\bar{I}} A^{\bar{I}}$$

и получили статистическую задачу

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{I, \bar{I}} \frac{d^4 z_I d\rho_I}{\rho_I^5} (\rho_I \Lambda)^b \exp \left(-\beta U_{int}(\rho_I, z_I, O_I) \right).$$

классическая статфизика частиц с переменным размером и ориентацией.

Мы решили эту статфизическую задачу, нашли статсумму и все важные величины в чистой глюодинамике. Мы использовали также вариационный принцип Фейнмана, потому вариационная оценка сохранилась.

Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в глюодинамике

1. Энергия вакуума

$$E_{\text{vac}} = V \varepsilon_{\text{vac}} = V b \frac{G_{\mu\nu}^2}{32\pi^2}$$

была выражена через $\Lambda_{\text{p.-v.}}$. Поскольку в то время была известна очень плохо, то мы предпочли предсказывать ее из глюонного конденсата. Нам было нужно

$$\Lambda_{\text{p.-v.}} \approx 230 \text{ MeV}$$

В то время считалось, что $\Lambda_{\text{p.-v.}} < 100 \text{ MeV}$ и уменьшалось со временем. А потом стало расти и теперь данные PDG почти точно совпадают с нами из работы 1984.

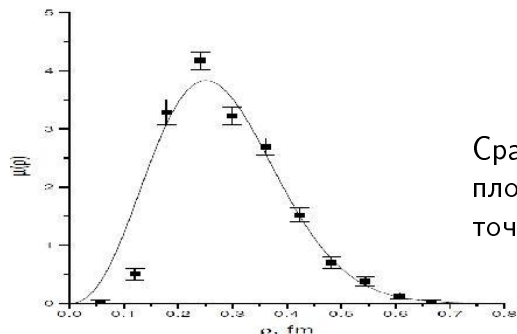


Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в глюодинамике

2. **Распределение по размерам** Мы получили

$$\mu(\rho) = \frac{\text{const}(M\rho)^b}{\rho^5} \exp[-c\rho^2\rho^2]$$

а сопоставление с экспериментом:



Сравнение вычисленной в 1984 плотности инстантонов с решеточными данными.



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в глюодинамике

3. *Инстантонная жидкость*, благодаря взаимодействию, стабилизировалась. Взаимодействие оказалось не мало, $\beta U_{int} \sim 1$, но отношение среднего размера инстантона к расстоянию между ними осталось малым:

$$\frac{\bar{R}}{\bar{\rho}} \approx 3.1 \quad (2)$$

—такое, которое требовалось для согласия с феноменологией.

4. **Константа связи** “заморозилась” также на сравнительно малом значении

$$\beta(\bar{\rho}) = \frac{2\pi}{\alpha_s} = \begin{cases} 12, & SU(2) \\ 15 & SU(3) \end{cases},$$

что обеспечило самосогласованность всего подхода в целом.



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в глюодинамике

Вычисления были проведены в 2-х петлях (одной оказалось недостаточно) **без всяких подгоночных параметров.**

5. Коррелятор топологических зарядов

$$\langle Q_t Q_t \rangle \approx (190 \text{ МэВ})^4 \approx (0.7 \Lambda_{P.V.})^4$$

— близко к эксперименту



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

Следующим этапом было введение кварков в инстантонный вакуум чистой глюодинамики. Прежде всего надо было объяснить спонтанное нарушение киральной инвариантности **СНКИ**.

В поле инстантона кварки имеют нулевые моды т. е. решения уравнения Дирака в поле инстантона

$$\nabla(A)\psi = 0,$$

Было очевидно, что они имеют отношение к СНКИ, но каким образом оно реализуется, было неясно.

Таким механизмом оказались *делокализация* и коллективизация индивидуальных нулевых мод в среде инстантонов. Это явление было хорошо известно в физике неупорядоченных систем (модель Андерсена).

Важно, что, благодаря медленному убыванию интегралов



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

перекрытия нулевых мод, оно происходит при *любой* плотности инстантонной жидкости. Кроме того, благодаря наличию нулевой моды, относительная величина кирального конденсата становится при малой плотности большой. Поэтому вычисление кирального конденсата в инстантонной жидкости является **параметрически оправданным**, что выгодно отличает этот случай от образования конденсата в пертурбативном подходе. В термодинамическом пределе в инстантонной среде образуется непрерывная функция распределения собственных значений уравнения Дирака $\nu(\lambda)$,

$$\nu(\lambda) = \langle \langle \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle \rangle \quad (3)$$

($\langle \langle \dots \rangle \rangle$) означает усреднение по инстантонному ансамблю), которая размазывается благодаря перекрытию нулевых мод.



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

Киральный конденсат согласно соотношению Кашера–Бэнкса связан со значением этой функции в нуле:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\pi \frac{N}{V} \nu(0) \quad (4)$$

($\frac{N}{V}$ – плотность инстантонной жидкости). В нашей работе 1986 (и в некоторых других) нам удалось вычислить функцию $\nu(\lambda)$ и сосчитать киральный конденсат:

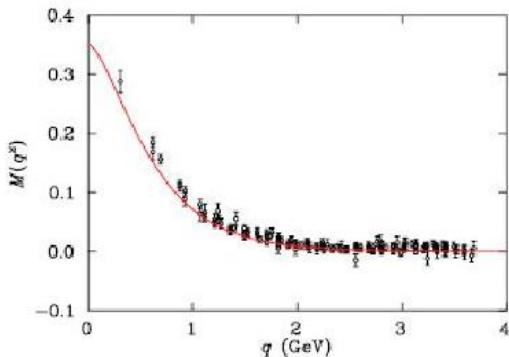
$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx -(255 \text{ МэВ})^3, \quad (5)$$

что очень хорошо согласуется с экспериментальным значением $-(250 \text{ МэВ})^3$ (в низкой точке нормировки).

Благодаря СНКИ кварк приобретает **динамическую массу**



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД



Масса как функция виртуальности, вычисленная нами и согласно решеточным данным. Значение в нуле определяет массу **конституентного кварка**

$$M = 350 \text{ MeV}$$



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

Масса меняется на масштабе $1/\rho$, но ее значение мало по **упаковочному параметру** $\frac{N}{V}\rho^4$

Усреднение по инстантонному ансамблю приводит к эффективному взаимодействию между конституентными кварками. В пределе большого числа цветов N_c это взаимодействие может быть **бозонизовано**, и таким путем можно найти **спектр мезонов** нашей теории.

Прежде всего, в соответствии с теоремой Голдстоуна, наблюдаем **безмассовый** π -мезон. $U(1)$ -проблема в инстантонном вакууме решается, и масса η' -мезона следует формуле Виттена в пределе $N_f \rightarrow 0$

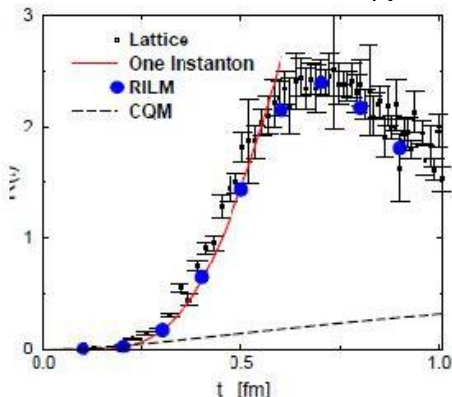
Аксиальная константа F_π^2 также вычисляется:

$$F_\pi^2 = 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M^2(p)}{(p^2 + M^2(p))^2} \approx 98 \text{ МэВ}.$$



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

Экспериментально $F_\pi^2 \approx 93.5$ МэВ. Масштабом $1/\rho$ определяются массы всех остальных мезонов в других каналах.



Поведение коррелятора векторных токов и экспериментальные данные из решеточного эксперимента.



Инстантонный вакуум. Наблюдаемые в КХД

Существование двух масштабов в инстантонном вакууме делает осмысленным

вычисление *низкоэнергетического лагранжиана*, справедливого для импульсов, меньших ρ^{-1} . На этих масштабах остаются только конституентные кварки (с постоянной массой) и π -мезоны. Эффективный лагранжиан, вычисленный нами в 1986 г, имеет исключительно простой вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i\hat{\partial} + iM \exp \left(i \frac{\hat{\pi} \gamma_5}{F_\pi} \right) \right] \psi. \quad (6)$$

Здесь $\hat{\pi} = \pi^a \lambda^a$ – поле, описывающее *октет* π -мезонов. Обратим внимание, что поле $\hat{\pi}$ входит без кинетического члена. Он возникает в результате интегрирования по кваркам.

