

*Темная материя в подходе
теории вложения:
возможные типы сгущения*

С.А. Пастон

СПбГУ, ПИЯФ НИЦ КИ

Загадка темной материи

Гипотеза ее существования объясняет наблюдения в широком диапазоне масштабов:

- галактические – кривые вращения;
- сверхгалактические – наблюдения гравитационного линзирования;
- космологические – формирование структур, полная масса материи во Вселенной.

Кривые вращения галактик

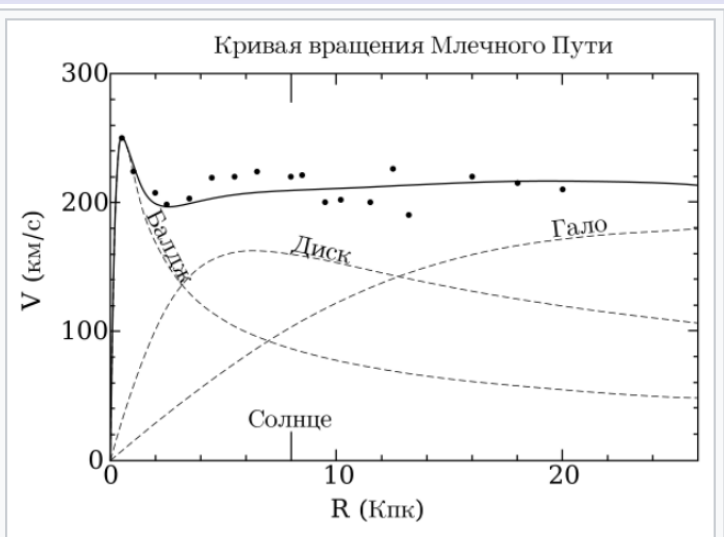
Рассмотрим в галактике звезду, имеющую скорость v , для простоты предполагая ее движение по окружности, тогда

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1)$$

Кривая вращения – график функции

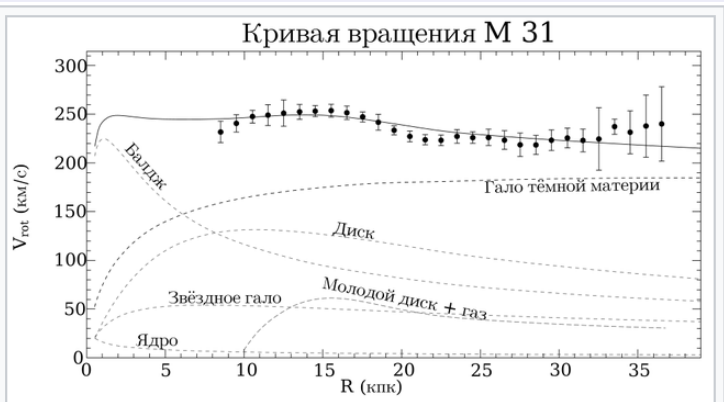
$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (2)$$

Если масса где-то заканчивается, то $M(r)$ выходит на константу и $v(r)$ при больших r должно убывать, как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, но...



Кривая вращения Млечного Пути с указанным вкладом балджа, диска и гало тёмной материи





Кривая вращения М 31. Пунктирными линиями  указан вклад различных частей галактики в общую кривую вращения, обозначенную сплошной линией

Природа темной материи **все еще не ясна!**

В рамках модели Λ CDM – современной стандартной модели космологии – свойства темной материи близки к свойствам нерелятивистской пылевидной материи.

Идеи описания природы темной материи:

- WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles);
- аксионная темная материя;
- FCDM (Fuzzy Cold Dark Matter);
- SIDM (Self-Interacting Dark Matter);
- ...

Однако, попытки ее детектирования (обнаружения ее взаимодействия с обычной материей) **не дают результата!**

Может быть, темной материи **на самом деле не существует**,
а она является эффектом описания гравитационного
взаимодействия?

Может быть, темной материи **на самом деле не существует**, а она является эффектом описания гравитационного взаимодействия?

Возможные варианты модификации теории гравитации:

- MOND (Modified Newtonian Dynamics, Милгром, 1983)

модифицируем закон всемирного тяготения, вместо

$$F = m \frac{GM}{r^2} \quad (3)$$

постулируем, например

$$F = m \frac{GM}{r^2} \sqrt{1 + a_0 \left/ \frac{GM}{r^2} \right.}, \quad a_0 \approx 10^{-10} \text{ м/с}^2 \quad (4)$$

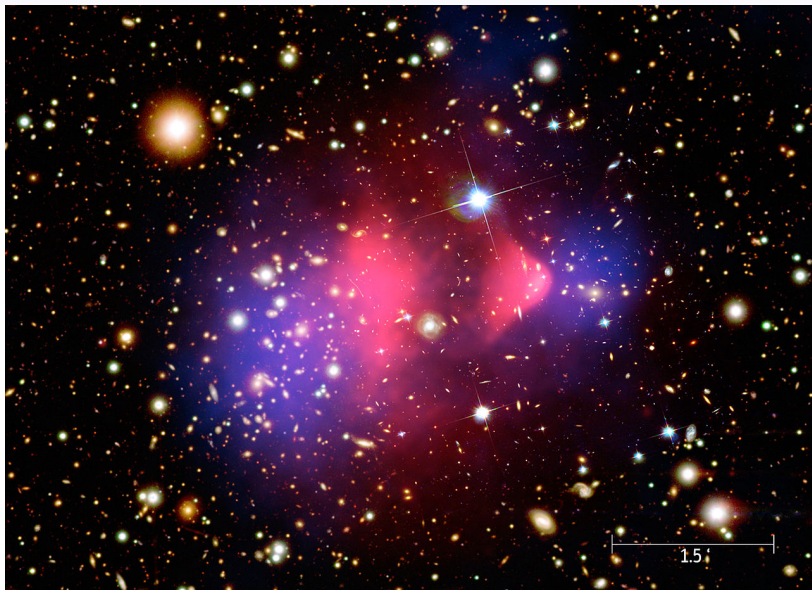
тогда при $\frac{GM}{r^2} \gg a_0$ будет работать обычный закон, а при $\frac{GM}{r^2} \ll a_0$ будет

$$F = m \frac{\sqrt{a_0 GM}}{r} \quad (5)$$

- $f(R)$ -гравитация;
- скалярно-тензорные модели гравитации;
- миметическая гравитация;
- ...
- теория вложения (embedding gravity)

Чтобы была возможность объяснить **все** связываемые с темной материей эффекты, модификация гравитации должна обладать достаточно большим числом дополнительных степеней свободы!

Скопление галактик Пуля (Bullet Cluster)



Миметическая гравитация

$$S = S^{\text{EH}}[g(\dots)] + S_m[g(\dots)], \quad S^{\text{EH}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (6)$$

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi) (\partial_\beta \varphi) \quad \left(\Rightarrow \quad g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) \equiv 1 \right) \quad (7)$$

$$G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = \kappa \rho (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi), \quad D_\mu (\rho g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = 0, \\ \rho \equiv \frac{1}{\kappa} g^{\mu\nu} (G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}) \quad (8)$$

(A.H. Chamseddine, V. Mukhanov, JHEP, 2013:11 (2013), 135, arXiv:1308.5410)

Эквивалентная формулировка в виде ОТО с дополнительной
миметической (темной?!) материей:

$$S = S^{\text{EH}} + S_m + S^+ \quad (9)$$

$$S^+ = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \rho \left(1 - g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) \right) \quad (10)$$

(A. Golovnev, Phys.Lett.B, 728 (2014), 39, arXiv:1310.2790)

Теория вложения (embedding gravity)

Простой геометрический смысл – метрика становится индуцированной метрикой

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}(\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b) \quad (11)$$

четырёхмерной поверхности в плоском объёмлющем пространстве, описываемой функцией вложения $y^a(x^\mu)$ ($\mu, \nu = 0, \dots, 3, a, b = 0, \dots, 9$).

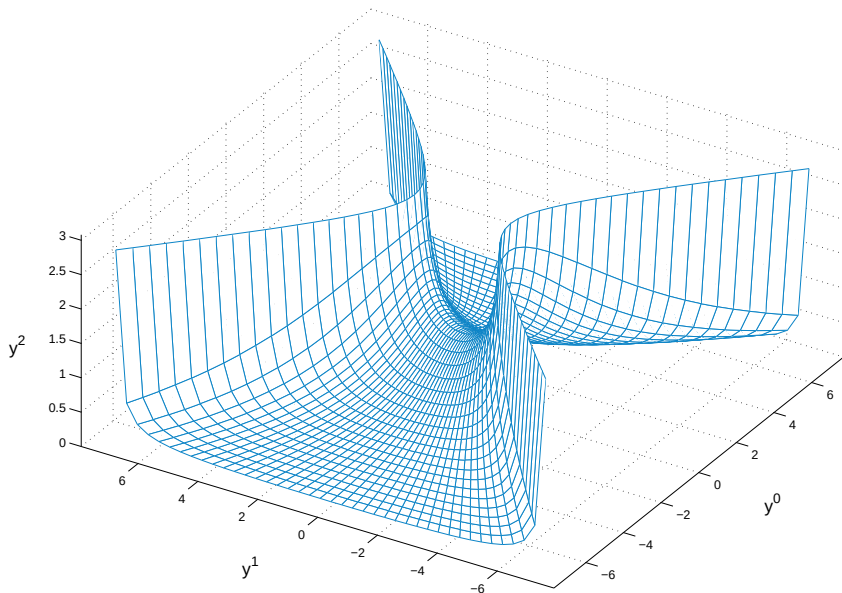
Теорема Жане-Картана-Фридмана:

произвольное n -мерное аналитическое псевдориманово пространство с сигнатурой (n_+, n_-) может быть локально изометрически вложено в любое N -мерное псевдориманово пространство с сигнатурой (N_+, N_-) , если

$$N \geq \frac{n(n+1)}{2}, \quad N_+ \geq n_+, \quad N_- \geq n_- \quad (12)$$

Для четырехмерного пространства-времени можно, в частности, использовать *плоское* объемлющее пространство Минковского $R^{1,9}$.

Вложение Фронсдала для черной дыры Шварцшильда



Действие обычное, но от новой переменной:

$$S = S^{\text{EH}}[g_{\mu\nu}[y^a]] + S_m[g_{\mu\nu}[y^a]], \quad S^{\text{EH}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (13)$$

(Т. Regge, С. Teitelboim, *"General relativity a la string: a progress report"*,
Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting (Trieste, Italy, 1975),
1977, p. 77, arXiv:1612.05256)

Первоначальная идея теории вложения – переписать ОТО
сходно с теорией струны в надежде на улучшение процедуры
квантования.

Первоначальная идея теории вложения – переписать ОТО сходно с теорией струны в надежде на улучшение процедуры квантования.

Но – *лишние* решения!

Уравнения движения (уравнения Редже-Тейтельбойма)

$$D_\mu \left((G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu}) \partial_\nu y^a \right) = 0 \quad (14)$$

Редже и Тейтельбойм: введем *ad hoc* дополнительные связи

$$G^{\mu 0} - \kappa T^{\mu 0} = 0 \quad (15)$$

Уравнения Редже-Тейтельбойма можно переписать в виде уравнений Эйнштейна с дополнительным вкладом $\tau^{\mu\nu}$ – ТЭИ **фиктивной материи** (темной материи или энергии?!):

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= \kappa (T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) \\ D_\mu (\tau^{\mu\nu} \partial_\nu y^a) &= 0 \\ \eta_{ab} (\partial_\mu y^a) (\partial_\nu y^b) &= g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{16}$$

(M. Pavsic, *Class. Quant. Grav.*, 2 (1985), 869, arXiv:1403.6316)

Уравнения Редже-Тейтельбойма можно переписать в виде уравнений Эйнштейна с дополнительным вкладом $\tau^{\mu\nu}$ – ТЭИ **фиктивной материи** (темной материи или энергии?!):

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= \kappa (T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) \\ D_\mu (\tau^{\mu\nu} \partial_\nu y^a) &= 0 \\ \eta_{ab} (\partial_\mu y^a) (\partial_\nu y^b) &= g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (16)$$

(M. Pavsic, *Class. Quant. Grav.*, 2 (1985), 869, arXiv:1403.6316)

Эквивалентная формулировка в виде ОТО с дополнительной **фиктивной** материей:

$$S = S^{\text{EH}} + S_m + S^+ \quad (17)$$

где

$$S^+ = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left((\partial_\mu y^a) (\partial_\nu y^b) \eta_{ab} - g_{\mu\nu} \right) \tau^{\mu\nu} \quad (18)$$

(S. P., *Phys. Rev. D*, 96 (2017), 084059, arXiv:1708.03944),

если считать независимыми метрику $g_{\mu\nu}$ и величины y^a и $\tau^{\mu\nu}$.

Фиктивную материю описывают 10 компонент y^a
и 10 компонент $\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu}$, подчиненных уравнениям движения:

$$D_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \quad (19)$$

$$\tau^{\mu\nu} b_{\mu\nu}^a = 0 \quad (20)$$

$$\eta_{ab}(\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b) = g_{\mu\nu} \quad (21)$$

где $b_{\mu\nu}^a = D_\mu \partial_\nu y^a$ – вторая основная форма поверхности, характеризующая ее внешнюю кривизну.

Анализ на космологических масштабах

Необходимо понять, какую форму имеет поверхность, т.е. выбрать вид вложения $y^a(x^\mu)$ для метрики Фридмана.

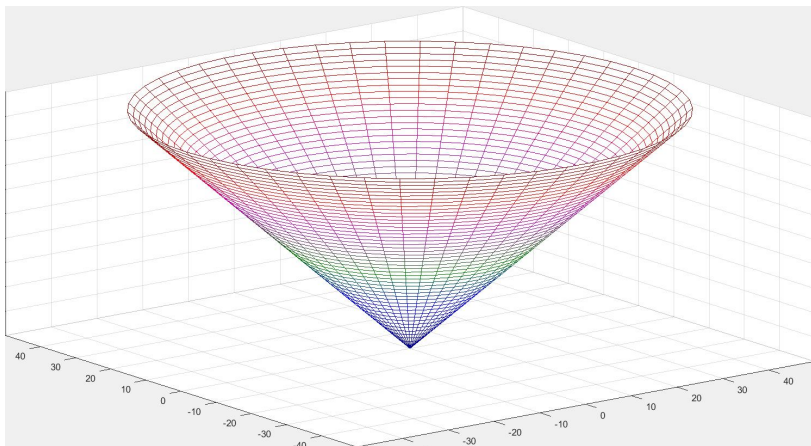
Известны обладающие соответствующей симметрией пятимерные вложения для каждой из моделей Фридмана:

закрытая модель Фридмана (сигнатура $(+ - - - -)$)

$$\begin{aligned}y^0 &= \int dt \sqrt{\dot{a}^2(t) + 1} \\y^1 &= a(t) \cos \chi \\y^2 &= a(t) \sin \chi \cos \theta \\y^3 &= a(t) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\y^4 &= a(t) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}\tag{22}$$

для метрики

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))\tag{23}$$

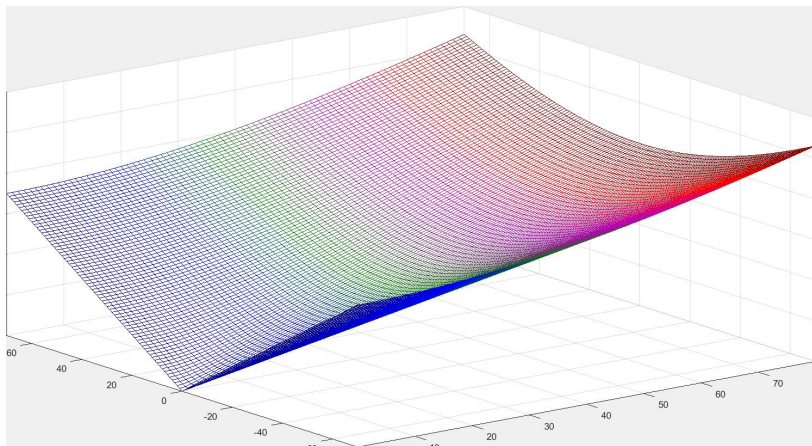


открытая модель Фридмана (сигнатура $(+ - - - -)$)

$$\begin{aligned}y^0 &= a(t) \operatorname{ch} \chi \\y^1 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \cos \theta \\y^2 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi \\y^3 &= a(t) \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi \\y^4 &= \int dt \sqrt{\dot{a}^2(t) - 1}\end{aligned}\tag{24}$$

для метрики

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))\tag{25}$$

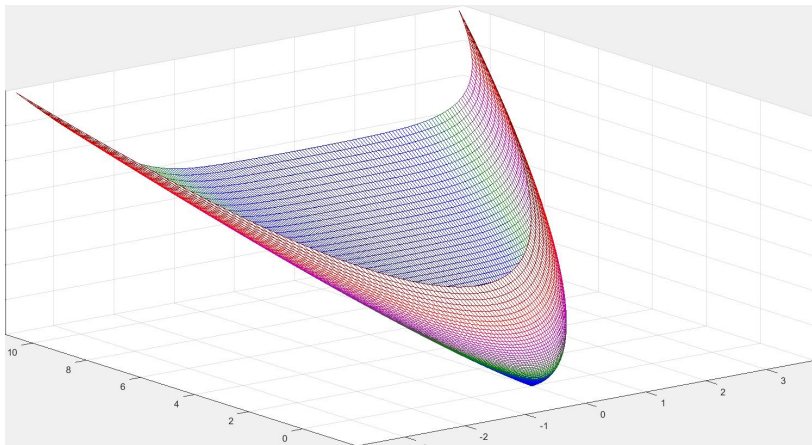


пространственно-плоская модель Фридмана (сигнатура (+ - - - -))

$$\begin{aligned}y^0 &= \frac{1}{2} \left(r^2 a(t) + \int \frac{dt}{\dot{a}(t)} + a(t) \right) \\y^1 &= \frac{1}{2} \left(r^2 a(t) + \int \frac{dt}{\dot{a}(t)} - a(t) \right) \\y^2 &= a(t) r \cos \theta \\y^3 &= a(t) r \sin \theta \cos \varphi \\y^4 &= a(t) r \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}\tag{26}$$

для метрики

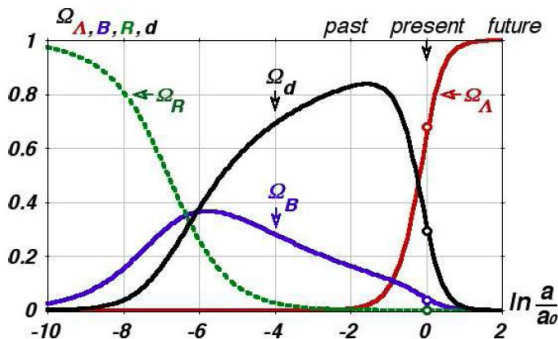
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))\tag{27}$$



Проведенный анализ показал, что при использовании таких пятимерных вложений если мы накладываем естественные начальные условия в начале инфляции, то к настоящему моменту теория переходит в ОТО, т.е. плотность фиктивной материи становится исчезающе мала
(S. P., A.A. Sheykin, *IJMPD*, 21:5 (2012), 1250043, arXiv:1106.5212).

Использование вложений, для которых поверхность лежит в 5-мерном подпространстве 10-мерного объемлющего пространства, выглядит неестественно. В дальнейшем предполагается повторить анализ с использованием *развернутых* вложений, занимающих все имеющиеся 10 измерений.

Однако, если о естественности выбора начальных условий не думать, то можно получить хорошее согласие с наблюдениями в настоящее время:



(A. Davidson, D. Karasik, Y. Lederer, arXiv:gr-qc/0111107).

Анализ на меньших масштабах

Будем интересоваться решениями, для которых фиктивная материя в настоящее время похожа на холодную темную материю:

$$\tau^{\mu\nu} \approx \rho_\tau \delta_0^\mu \delta_0^\nu, \quad \tau^{0k}, \tau^{ik} \ll \rho_\tau \quad (28)$$

Пренебрегая областями сильного гравитационного поля и эффектами расширения вселенной (ограничиваемся не слишком большим временным интервалом):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (29)$$

Тогда в главном приближении:

$$\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \rho_\tau = 0 \quad (30)$$

Предположим, что в результате расширения вселенной возникает почти однородное распределение фиктивной материи с $\rho_\tau > 0$.

Затем флуктуации плотности нарастают, в результате чего могут возникать статические сгущения, поиск их возможных вариантов – **главная цель!**

(S. P., A.J. Ziyatdinov, arXiv:2509.00980)

Метрика почти плоская, значит

$$y^a = \bar{y}^a + q^a \quad (31)$$

где $\bar{y}^a$ – фоновое вложение метрики пространства Минковского.

В линейном приближении:

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2q_a \bar{b}_{\mu\nu}^a \quad (32)$$

где $\xi_\mu = q_a \partial_\mu \bar{y}^a$, $\bar{b}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \partial_\nu \bar{y}^a$

Для взаимнооднозначного соответствия $h_{\mu\nu} \leftrightarrow q^a$ нужна *развернутость* $\bar{y}^a$: максимально возможное значение 6 ранга $\bar{b}_{\mu\nu}^a$.

Будем рассматривать достаточно маленькую область, в которой внешняя кривизна фоновой поверхности $\bar{b}_{\mu\nu}^a$ мало меняется, тогда поворотом осей:

$$\bar{b}_{\mu\nu}^a = \delta_A^a B_{\mu\nu}^A \quad (33)$$

где $A = 4, \dots, 9$, и $B_{\mu\nu}^A = B_{\nu\mu}^A$ – константа,

$$B_{\mu\alpha}^A B_{\nu\beta}^A - B_{\mu\beta}^A B_{\nu\alpha}^A = 0 \quad (34)$$

Пусть $B_{\mu\nu}^A \sim \frac{1}{L}$, тогда размер области должен быть много меньше L .

Если гравитационное поле $h_{\mu\nu}$, а значит и q^a , достаточно мало, то:

$$b_{\mu\nu}^a = D_\mu \partial_\nu y^a \approx \bar{b}_{\mu\nu}^a = \delta_A^a B_{\mu\nu}^A \quad (35)$$

Тогда фиктивная материя в **линейном режиме**:

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu} b_{\mu\nu}^a = 0 & \Rightarrow \tau^{\mu\nu} B_{\mu\nu}^A = 0 \Rightarrow \\ \tau^{ik} = -\alpha_A^{ik} \left(\tau^{00} B_{00}^A + 2\tau^{0m} B_{0m}^A \right) & \approx -\alpha_A^{ik} B_{00}^A \rho_\tau = w_{ik} \rho_\tau \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\alpha_A^{ik} = \alpha_A^{ki}, \quad \alpha_A^{ik} B_{ik}^B = \delta_A^B, \quad w_{ik} = -B_{00}^A \alpha_A^{ik} \ll 1 \quad (37)$$

При усилении гравитации уравнение уже нелинейно по $\tau^{\mu\nu}$:

$$\tau^{\mu\nu} D_\mu \partial_\nu (\bar{y}^a + q^a [h[T + \tau]]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau^{ik} = w_{ik}[\varphi] \rho_\tau \quad (38)$$

Вне линейного режима действующая на фиктивную материю сила

$$\partial_0 \tau^{0k} = -\rho_\tau \partial_k \varphi - \partial_i (w_{ik}[\varphi] \rho_\tau) \quad (39)$$

имеет достаточно случайное направление (поскольку w_{ik} нелокально зависит от гравитационного потенциала φ) и зависит от времени, поскольку требование ее независимости от времени $\partial_0 w^{ik} = 0$ приводит к появлению слишком большого количества уравнений на q^a и не может быть выполнено.

Наличие такой силы препятствует возникновению статических сгущений фиктивной материи (“размывает” их), что дает основания полагать, что существенные сгущения возникают только в линейном режиме, пока

$$\rho + \rho_{\tau} < \rho_b \quad (40)$$

В нелинейном же режиме, который, в частности, обязательно возникает когда $\rho > \rho_b$, есть основания считать, что ρ_{τ} настолько мало, что его влияние на гравитационное поле незаметно.

Оценим граничное значение ρ_b , отделяющее линейный режим фиктивной материи от нелинейного.

Связь $h_{\mu\nu}$ и q^a :

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu q_\nu + \partial_\nu q_\mu - 2q_A B_{\mu\nu}^A \quad (41)$$

Из уравнений Эйнштейна имеем в гармонических координатах:

$$h_{\mu\nu} = 2\varphi\delta_{\mu\nu} \quad (42)$$

где φ – ньютоновский гравитационный потенциал, значит

$$q_A \sim L\varphi \quad (43)$$

Имеем

$$b_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \partial_\nu y^a - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha y^a = \bar{b}_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \partial_\nu q^a - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha y^a \quad (44)$$

Грубо считая, что при действии на φ верно $\partial_k \sim 1/r$, $\partial_0 \sim 1/t$, получаем

$$b_{ik}^A - \bar{b}_{ik}^A \sim \frac{L}{r^2} \varphi, \quad b_{00}^A - \bar{b}_{00}^A \sim \frac{L}{t^2} \varphi \quad (45)$$

Для статического случая условие выполнения линейного режима:

$$b_{ik}^A - \bar{b}_{ik}^A \ll \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi}{r^2} \ll \frac{1}{L^2} \quad (46)$$

С учетом

$$\partial_i \partial_i \varphi = 4\pi G(\rho + \rho_\tau) \quad (47)$$

получаем

$$4\pi G(\rho + \rho_\tau) = \partial_i \partial_i \varphi < \frac{\varphi}{r^2} \ll \frac{1}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_b = \frac{1}{4\pi GL^2} \quad (48)$$

Оценка значения L

Для нашей области пространства-времени, если исходить из значения плотности темной материи $0.01 M_{\odot}/\text{пк}^3$ в большой окрестности Солнечной системы, где полная средняя плотность $0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$, то можно взять

$$\rho_b = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3 \quad \Rightarrow \quad L = 4 \text{ Мпк} \quad (49)$$

Если исходить из более надежных данных, то можно брать L в несколько раз больше, что близко к размеру местной группы галактик.

Сходство и отличие с MOND

MOND:

отличия от ОТО постулативно появляются, когда меньше граничного значения a_0 оказывается

$$\partial_k \varphi \sim \frac{\varphi}{r} \quad (50)$$

Здесь:

отличия от ОТО, появляются когда меньше граничного значения $\frac{1}{L^2}$ оказывается

$$\partial_i \partial_k \varphi \sim \frac{\varphi}{r^2} \quad (51)$$

вследствие того, что фиктивная материя теории вложения входит в линейный режим и ее влияние на гравитационное поле становится заметным.

Поиск статических сгущений, возникающих в линейном режиме

Считаем, что обычная материя отсутствует.

Условие статичности:

$$\rho_\tau \partial_i \varphi + w_{ik} \partial_k \rho_\tau = 0 \quad (52)$$

Если $\rho_\tau \neq 0$, то

$$\partial_i \varphi + w_{ik} \partial_k z = 0 \quad (53)$$

где $z = \ln(\rho_\tau / \tilde{\rho})$.

При этом имеем уравнение Пуассона:

$$\partial_i \partial_i \varphi = 4\pi G \tilde{\rho} e^z \quad (54)$$

Диагонализуем матрицу w_{ik} : $w_{ik} = \text{diag}\{w_1, w_2, w_3\}$, тогда

$$\begin{aligned} (w_1 - w_2) \partial_1 \partial_2 z &= 0, & (w_1 - w_3) \partial_1 \partial_3 z &= 0, & (w_2 - w_3) \partial_2 \partial_3 z &= 0 \\ (w_1 - w_2) \partial_1 \partial_2 \varphi &= 0, & (w_1 - w_3) \partial_1 \partial_3 \varphi &= 0, & (w_2 - w_3) \partial_2 \partial_3 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Случай 1 – все w_j разные

Обе величины z и φ должны быть суммой функций от x^1 , от x^2 и от x^3 . Тогда из уравнения Пуассона находим, что зависимость от x^2, x^3 отсутствует, все зависит только от x^1 .

Тогда находим

$$z = C_1 - \frac{\varphi}{w_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi''(x^1) = C_2 e^{-\varphi(x^1)/w_1} \quad (56)$$

Решение с убывающей плотностью только при $w_1 > 0$:

$$\varphi = \varphi_0 + 2w \ln \left(\operatorname{ch} \frac{x^1 - x_0^1}{\delta} \right), \quad \rho_\tau = \frac{\rho_0}{\operatorname{ch}^2 \frac{x^1 - x_0^1}{\delta}} \quad (57)$$

Это сгущение типа **толстая стенка**, ее толщина δ , а плотность в центре:

$$\rho_0 = \frac{w}{2\pi G \delta^2} \quad (58)$$

Случай 2 – два из трех w_j совпадают

т.е. $w \equiv w_1 = w_2 \neq w_3$

Обе величины z и φ должны быть суммой функций от x^1, x^2 и от x^3 . Тогда из уравнения Пуассона находим, что все зависит или от x^1, x^2 , или от x^3 (но этот вариант уже рассмотрен).

Для первого варианта находим

$$z = C_1 - \frac{\varphi}{w} \quad \Rightarrow \quad (\partial_1^2 + \partial_2^2) \varphi = C_2 e^{-\varphi/w} \quad (59)$$

– хорошо известное уравнение Лиувилля.

Решения с убывающей плотностью только при $w > 0$, причем если плотность интегрируема, то они $SO(2)$ симметричны вокруг некоторого центра

(W. Chen, C. Li, “Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations”, Duke Mathematical journal, 63: 3 (1991), 615–622).

Условие удается усилить до простого убывания плотности.

Для таких решений:

$$\varphi''(s) + \frac{1}{s}\varphi'(s) = C_2 e^{-\varphi(s)/w}, \quad s\varphi'(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0 \quad (60)$$

где $s = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2}$.

Решение:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + 2w \ln \left(1 + \frac{s^2}{\delta^2} \right), \quad \rho_\tau = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{s^2}{\delta^2} \right)^2} \quad (61)$$

Это сгущение типа **толстая струна**, ее толщина δ , а плотность в центре:

$$\rho_0 = \frac{2w}{\pi G \delta^2} \quad (62)$$

Полученные сгущения типа **стенка** и **струна** можно попытаться **связать** с наблюдаемыми двумерными и одномерными структурами, сформированными из галактик – листообразными тонкими стенками (sheet-like tenuous walls) и длинными вытянутыми нитями (long elongated filaments).

Этот вопрос требует дополнительного исследования.

Случай 3 – все три w_j совпадают

т.е. $w_{ik} = w\delta_{ik} \Rightarrow$ фиктивная материя имеет давление $p_\tau = w\rho_\tau$, а значит является **изотермическим идеальным газом** (если $w > 0$, но иначе статических сгущений не будет)

Для этого случая находим

$$z = C_1 - \frac{\varphi}{w} \quad \Rightarrow \quad \partial_i \partial_i \varphi = C_2 e^{-\varphi/w} \quad (63)$$

– 3х-мерный аналог уравнения Лиувилля.

Ограничиваемся анализом сферически симметричных решений (можно предполагать, что других нет, но доказательство этого не известно, в отличие от 2х-мерного случая).

Тогда имеем

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = C_2 e^{-\varphi(r)/w}, \quad r^2 \varphi'(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0 \quad (64)$$

Такая задача о нахождении профиля плотности распределения **самогравитирующей изотермической сферы** встречается при изучении звездной динамики

(J. Binney, S. Tremaine, “Galactic Dynamics: Second Edition”, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008, раздел 4.3.3(b)).

Известно одно сингулярное в центре решение – сингулярная изотермическая сфера, а также однопараметрическое семейство конечных в центре решений, которые находятся численно.

Для удобства анализа уравнения можно избавиться от констант:

$$\tilde{\varphi}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{\varphi}'(\tilde{r}) + e^{\tilde{\varphi}(\tilde{r})} = 0 \quad (65)$$

где $r = \tilde{r}\sqrt{w/C_2}$, $\varphi = -w\tilde{\varphi}$.

Сделаем замены $\tilde{r} = e^u$, $\tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \gamma(u) - 2u$, тогда

$$\gamma''(u) + \gamma'(u) - 2 + e^{\gamma(u)} = 0 \quad (66)$$

Понижение порядка заменой $\psi(\gamma) = \gamma'(u)$:

$$\psi(\gamma)\psi'(\gamma) + \psi(\gamma) - 2 + e^\gamma = 0 \quad (67)$$

Для удобства анализа уравнения можно избавиться от констант:

$$\tilde{\varphi}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{\varphi}'(\tilde{r}) + e^{\tilde{\varphi}(\tilde{r})} = 0 \quad (65)$$

где $r = \tilde{r}\sqrt{w/C_2}$, $\varphi = -w\tilde{\varphi}$.

Сделаем замены $\tilde{r} = e^u$, $\tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \gamma(u) - 2u$, тогда

$$\gamma''(u) + \gamma'(u) - 2 + e^{\gamma(u)} = 0 \quad (66)$$

Понижение порядка заменой $\psi(\gamma) = \gamma'(u)$:

$$\psi(\gamma)\psi'(\gamma) + \psi(\gamma) - 2 + e^\gamma = 0 \quad (67)$$

Потеряно константное решение $\gamma(u) = \ln 2$, которому соответствует

$$\varphi(r) = w \ln \frac{C_2 r^2}{2w}, \quad \rho_\tau = \frac{w}{2\pi G r^2} \quad (68)$$

– этот профиль распределения известен как **сингулярная изотермическая сфера**. Но плотность растет **неограниченно!**

Остальные решения можно строить, решая уравнение 1ого порядка (67).

Удается показать, что с учетом условия в центре, решение единственно и соответствует $\psi(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow -\infty} 2$.

К $\gamma(u)$ возвращаемся из соотношения

$$\int \frac{d\gamma}{\psi(\gamma)} = u + \text{const} \quad (69)$$

Соответствующая $\tilde{\varphi}(\tilde{r})$ оказывается конечна при $\tilde{r} \rightarrow 0$ (когда $u \rightarrow -\infty$ и $\gamma \rightarrow -\infty$) и выбором константы можно выбрать решение с $\tilde{\varphi}(0) = 0$, а остальные получать из него сдвигом u .

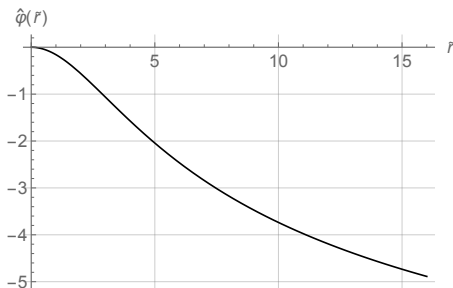
В итоге получаем решение:

$$\varphi(r) = \varphi_0 - w \hat{\varphi} \left(\frac{4r}{\delta} \right) \quad (70)$$

где $\hat{\varphi}(\tilde{r})$ единственное решение задачи

$$\hat{\varphi}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}} \hat{\varphi}'(\tilde{r}) + e^{\hat{\varphi}(\tilde{r})} = 0, \quad \tilde{r}^2 \hat{\varphi}'(\tilde{r}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad \hat{\varphi}(\tilde{r}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad (71)$$

которое находится численно.



Примерно при $r = \delta$ оказывается $\varphi''(r) = 0$ – на этом расстоянии сила гравитационного притяжения максимальна.

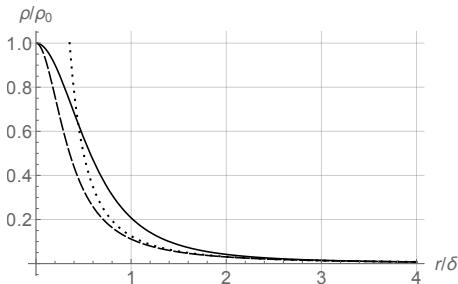
Соответствующий **изотермический** профиль плотности найденного сгущения типа **шар**:

$$\rho_\tau = \rho_0 \exp \left(\hat{\varphi} \left(\frac{4r}{\delta} \right) \right), \quad \rho_0 = \frac{4w}{\pi G \delta^2} \quad (72)$$

где плотность в центре ρ_0 как и в предыдущих случаях связана с размером δ .

Сравнение изотермического (сплошная линия), используемого при фитировании темных гало псевдоизотермического $\rho_{\text{iso}} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}}$ (пунктир)

и сингулярного изотермического (точки) профилей:



При больших r :

$$\rho_\tau \approx \rho_0 \frac{\delta^2}{8r^2} \exp \left(0.6 \sqrt{\frac{\delta}{r}} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln \left(\frac{2.7r}{\delta} \right) \right) \right) \quad (73)$$

(находится по теории возмущений вокруг сингулярного изотермического профиля, коэффициенты найдены численно).

В главном приближении:

$$\rho_\tau \approx \frac{\rho_0 \delta^2}{8r^2} = \frac{w}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (74)$$

Если при больших r пренебречь вкладом обычной материи, учитывая только фиктивную, имеем

$$M(r) = \int_0^r dr 4\pi r^2 \rho_\tau = M_1 + \int_{r_1}^r dr 4\pi r^2 \frac{w}{2\pi G r^2} = M_1 + \frac{2w(r - r_1)}{G} \quad (75)$$

откуда

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \approx \sqrt{2w} \quad (76)$$

при больших r , т.е. кривая вращения выходит на **плато**, высота которого определяется значением w . Оно определяется фоновым вложением $\bar{y}^a$ и достаточно медленно меняется в пространстве.

Интересно, что для Млечного пути и галактики Андромеда предполагаемый вклад темной материи в высоту плато весьма близки, составляя около 180 км/с.

Для шарообразных сгущений получается

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi G}} \frac{v_*}{\sqrt{\rho_0}} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{loc}} \sim \rho_0 \delta^3 \sim \frac{v_*^3}{\sqrt{\rho_0}} \quad (77)$$

где M_{loc} – масса локализованной части фиктивной материи.

Это соотношение можно попытаться сравнивать с получаемым из наблюдений барионным законом Талли-Фишера:

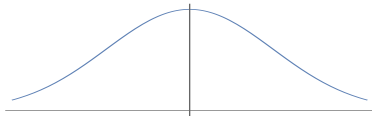
$$M_{\text{bar}} \sim v_*^\zeta \quad (78)$$

где ζ от 3.5 до 4, а M_{bar} – барионная масса галактики.

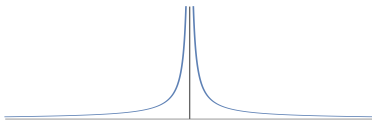
Этот вопрос требует дополнительного исследования.

Core-cusp проблема

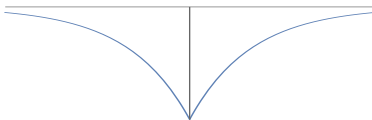
наблюдения в основном показывают гладкое в центре распределение для плотности ρ материи в галактиках – **core**:



в то время как численные симуляции приводят к росту $\rho \sim r^\alpha$, $\alpha \approx -1$ плотности в центре – **cusp**:



что соответствует гравитационному потенциалу φ :



Есть аргументы в пользу того, что если распределение обычной материи (состоящей из частиц) формируется в заранее заданной (например – фиктивной материей) сферически симметричной потенциальной яме, то возникает именно **core**-профиль

(A. D. Kapustin, S. P., “Analytical analysis of the origin of core-cusp matter density distributions in galaxies”, JCAP, 2022: 11 (2022), 025, arXiv:2207.04288).

Поэтому существование шарообразных сгущений фиктивной материи может объяснить, почему не наблюдаются предсказываемый многочастичными симуляциями **cusp**-профиль.

При этом важно, что фиктивная материя теории вложения сама из частиц не состоит и к ней результаты таких симуляций не применимы.