

Теория гравитации Хаяши - Ширафуджи

Семёнова А.Н., ОТФ

Общая теория относительности

Связь геометрии пространства-времени и распределения материи

- Независимая переменная – метрический тензор $g_{\mu\nu}$
- Основная геометрическая характеристика – тензор кривизны Римана $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$

$$R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma} \quad \text{тензор Риччи}$$

$$R = g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} \quad \text{скалярная кривизна}$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \quad \text{тензор Эйнштейна}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\rho}$$

связность = параллельный перенос, симметричная в ОТО

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu})$$

Действие (группа диффеоморфизмов) -> уравнения движения:

$$G^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Lambda) \quad \begin{array}{l} \text{уравнения Эйнштейна, } T_{\mu\nu} \text{ тензор энергии-импульса,} \\ \Lambda - \text{ космологическая постоянная} \end{array}$$

- Независимая переменная $g_{\mu\nu}$ имеет две динамические степени свободы (распространяющиеся (гравитационные волны))
- Λ играет роль тёмной энергии

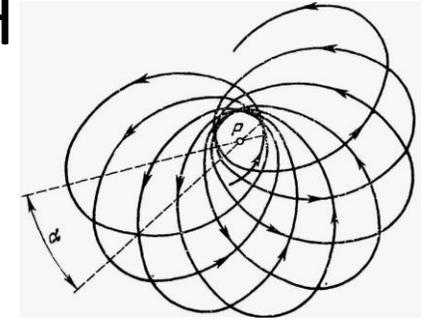
ОТО наблюдательные подтверждения

Смещение перигелия Меркурия

Эйнштейновский тест

1846 год, Леверье: расчёт по Ньютону -- 526,7" за 100 лет
наблюдения -- 565" за 100 лет

1895 – у Марса
(Земли и Венеры)

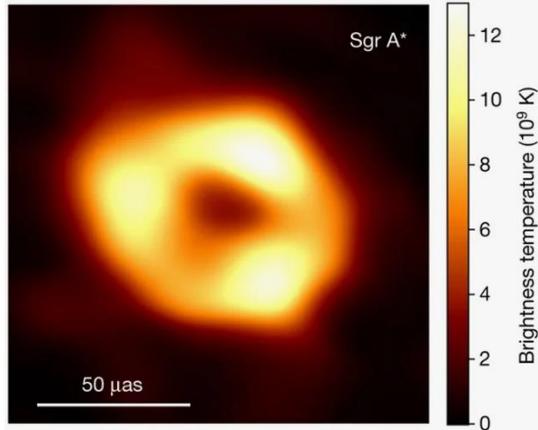


Дополнительное смещение по Эйнштейну

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 A(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 A^2}{T^2 c^2(1-e^2)}$$

42,98" за 100 лет для Меркурия

Чёрные дыры



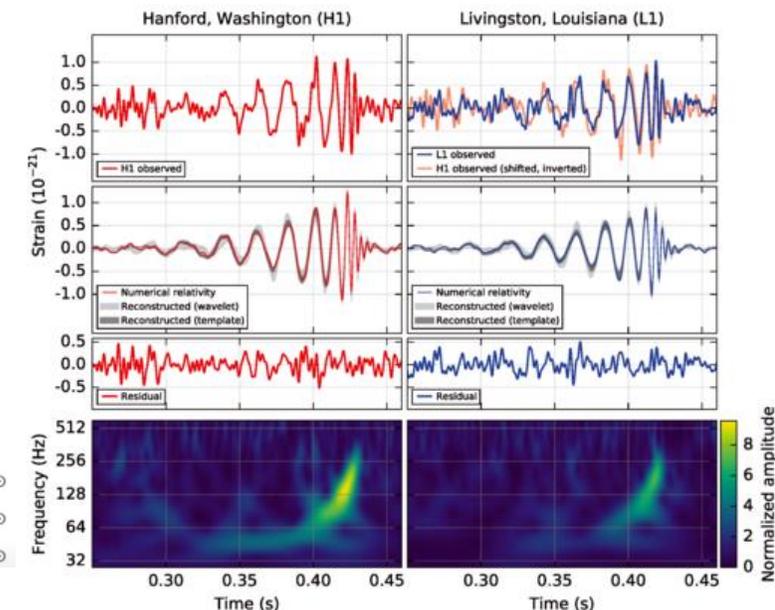
Фотонное кольцо вокруг Sgr A*
 $m=4 \cdot 10^6 M_\odot$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

метрика Шварцшильда (G=1)
физическая сингулярность при $r=0$
 $r=2M$ – горизонт, координатная особенность

Primary black hole mass $36^{+5}_{-4} M_\odot$
Secondary black hole mass $29^{+4}_{-4} M_\odot$
Final black hole mass $62^{+4}_{-4} M_\odot$

Гравитационные волны



ОТО проблемы

Квантование

- АДМ, ФП – каноническое квантование - неперенормируемая
- Суперструны
- Петлевая гравитация

Модификации = новые переменные,
эквивалентность ОТО

Тёмная материя с 20-ых годов 20 века

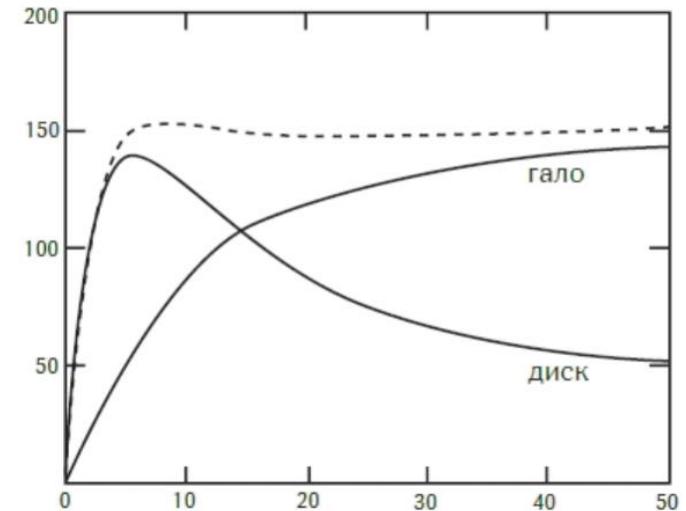
Наблюдения (первые)

- Оценка масс галактик – нехватка массы видимого вещества (движение звёзд перпендикулярно плоскости диска)
- Галактики – скорости вращения периферических звёзд не соответствуют ожиданиям

Теория

- Нехватка времени для формирования галактик
- Пространственно плоская вселенная (скорее всего) $\rightarrow \rho \sim H^2$

Тёмная = не участвует в электромагнитном взаимодействии (и сильном, и слабом)



Кривые скоростей вращения галактик
Пунктир - наблюдение

Изотропность
реликтового
излучения!

Тёмная материя

Новая материя

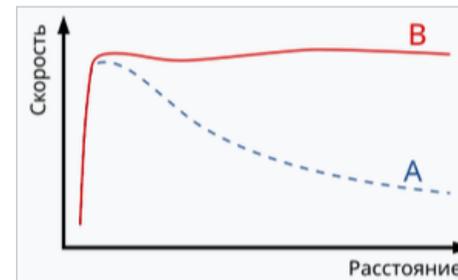
Однородность
реликтового излучения

Барионная

- ЧД (первичные, максимоны)

Небарионная

- Нейтрино
- Аксионы
- Суперсимметричные частицы



Новая теория гравитации

Модифицированная ньютонова динамика

$$F = \frac{GMm}{r^2} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a$$

a – ускорение силы тяжести

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a}{a_0} \quad \text{для малых аргументов}$$

! Гравитационное линзирование

Эйнштейновский тест

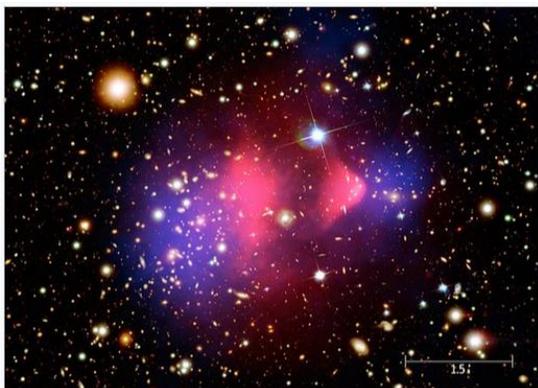
Отклонение лучей света
Геодезические

Если при больших r $a \ll a_0$, для звёзд,
далёких от центра галактики

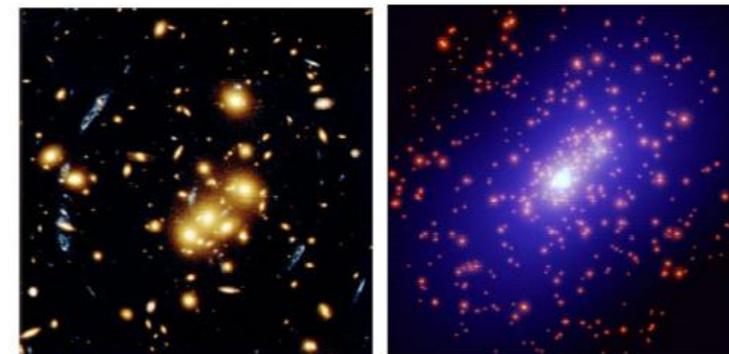
$$v = \sqrt[4]{GMa_0}$$

МОНД не может объяснить
смещение общего центра масс
относительно центра масс видимого
вещества

Копии, спектр



Рентгеновское изображение (розовый цвет) совместно с изображением в видимом свете (галактики), распределение массы вычислено из данных о гравитационном линзировании (синий цвет).



Модифицированные теории

- Задать теорию:
- независимая переменная (e) (больше, чем g)
 - действие $S(e)$, его симметрии = симметрии теории
 - уравнения движения (может и тёмную энергию получится описать)
 - канонический формализм

В ОТО метрика, определяется тензором энергии-импульса всей материи

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

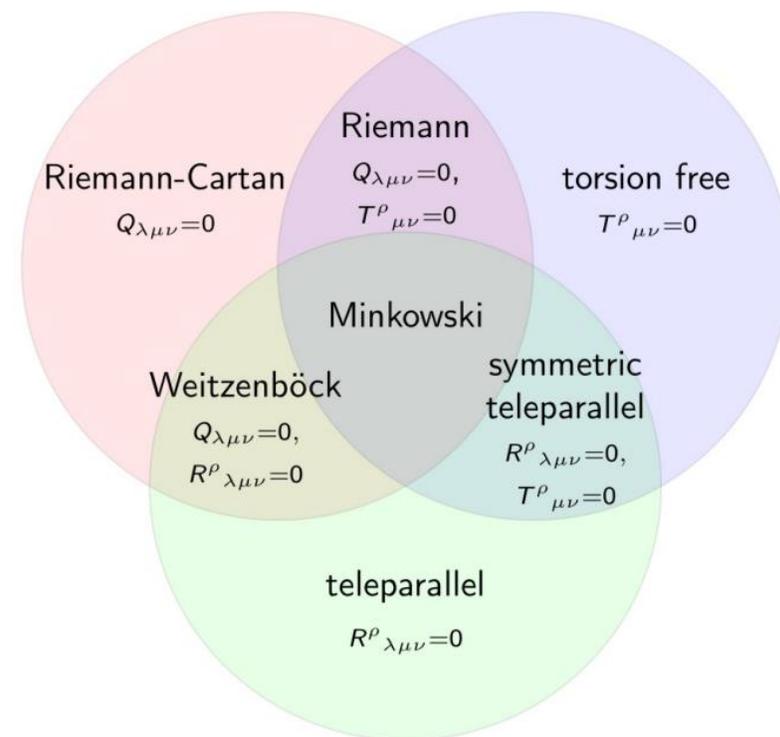
- Метрика выражается через новые переменные $g(e)$
- Тензор Эйнштейна $G^{\mu\nu}(g(e)) \equiv \tilde{G}^{\mu\nu}(e)$
- Уравнения движения $F(e)=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}^{\mu\nu}(e) = \text{нечто} = \kappa(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) \\ \text{доп. ур-я, т.к. } n(e) > n(g) \end{array} \right.$$

Более общая (аффинная) связность:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} \overset{\text{риманова связность}}{(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})} + \frac{1}{2} \underset{\text{конторсия}}{(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu})} + \frac{1}{2} \underset{\text{дисформация}}{(Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\mu\alpha} - Q_{\alpha\mu\nu})}$$

С дополнительными степенями свободы. Эффект тёмной материи – гравитационный эффект.



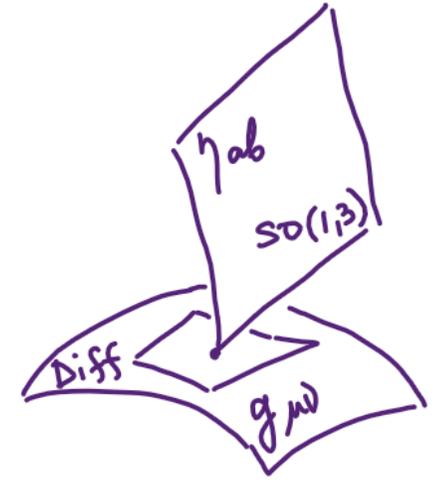
Тетрада и калибровочная симметрия

Независимой переменной NGR является тетрада e_μ^a , неособая (отображение)

$\mu=0,1,2,3, a=0,1,2,3$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}$$

(В тетрадном формализме в ОТО используется для введения спиноров на группе Лоренца (калибровочная группа). Латинский индекс – индекс «внутренней» симметрии.)



Ковариантная производная объекта с индексами разных типов: $D_\mu A^{a\nu} = \partial_\mu A^{a\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^{a\rho} + \omega_{\mu a}^b A^{c\nu}$
 $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ - координатная связность, $\omega_{\mu a}^b$ - спин-связность (калибровочное поле).

!Ковариантное постоянство тетрады (16 комп): $0 \equiv D_\mu e_a^\nu = \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho + \omega_{\mu a}^b e_b^\nu$ (зануляется неметричность)
 даёт связь

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_a^\alpha (\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b)$$

$$T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad \text{- кручение}$$

Следствие - ковариантное постоянство метрики: $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$
 приводит к связности

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu})$$

риманова связность $\tilde{\Gamma}$ конторсия $K_{\alpha\mu\nu}$

Связь кручения и спин-связности

$$T_{\mu\nu}^\alpha = e_a^\alpha (\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b) - e_a^\alpha (\partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\nu b}^a e_\mu^b)$$

Кривизна

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\cdot\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\cdot\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\cdot\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\cdot\beta}^{\rho} - \Gamma_{\nu\cdot\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\cdot\beta}^{\rho}$$

общая кривизна по аффинной связности

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\mu\nu} + T_{\mu\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\mu})$$



$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}(\Gamma) = R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) + \tilde{D}_{\mu}K^{\alpha}_{\cdot\nu\beta} - \tilde{D}_{\nu}K^{\alpha}_{\cdot\mu\beta} + K^{\alpha}_{\cdot\mu\rho}K^{\rho}_{\cdot\nu\beta} - K^{\alpha}_{\cdot\nu\rho}K^{\rho}_{\cdot\mu\beta}$$

$$R^a_{\cdot b\mu\nu}(\Gamma) = e^a_{\alpha}e^{\beta}_b R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}(\Gamma) = \partial_{\mu}\omega^a_{\cdot\nu b} - \partial_{\nu}\omega^a_{\cdot\mu b} + \omega^a_{\cdot\mu c}\omega^c_{\cdot\nu b} - \omega^a_{\cdot\nu c}\omega^c_{\cdot\mu b}$$

напряжённость калибровочного поля

при условии ковариантной постоянности тетрады

Геометрия Вайценбёка: $R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = 0 \rightarrow R^a_{\cdot b\mu\nu} = 0 \rightarrow R = 0$

Координатная связность и соответствующее кручение:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = e^{\alpha}_a \partial_{\mu}e^a_{\nu}$$

$$T^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = e^{\alpha}_a (\partial_{\mu}e^a_{\nu} - \partial_{\nu}e^a_{\mu})$$

спин-связность чисто калибровочная (её можно занулить калибровочным преобразованием)

Нарушается калибровочная SO(1,3) симметрия

Появились дополнительные степени свободы:
16 (тетрада) = 10 (метрика) + 6
6 (калибровочные) -> 6(динамические)

Действие и симметрии

Группа диффеоморфизмов есть

Телепараллельный эквивалент ОТО

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 |e| \mathbb{T}(e) = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 |e| \left(\frac{1}{4} T_{\alpha\beta\mu} T^{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2} T_{\alpha\beta\mu} T^{\beta\alpha\mu} - T_{\mu} T^{\mu} \right)$$

Калибровочная симметрия восстановлена с точностью до поверхностного члена

$$R(\Gamma) = R(\tilde{\Gamma}) \left[\frac{1}{4} T_{\alpha\beta\mu} T^{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2} T_{\alpha\beta\mu} T^{\beta\alpha\mu} - T_{\mu} T^{\mu} \right] + 2\tilde{D}_{\mu} T^{\mu} \quad \text{скаляр кривизны} = 0$$

Теория гравитации Хаяши – Ширафуджи (NGR)

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 |e| \mathfrak{T}(e) = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 |e| \left(\frac{a}{4} T_{\alpha\beta\mu} T^{\alpha\beta\mu} + \frac{b}{2} T_{\alpha\beta\mu} T^{\beta\alpha\mu} - c T_{\mu} T^{\mu} \right)$$

Калибровочная симметрия нарушена
Есть дополнительные степени свободы

Анализ теории на наличие адекватных обобщений ОТО...

Сферически симметричные решения

Вакуумные уравнения движения $\mathfrak{G}_{\mu}^{\cdot\nu} \equiv \tilde{\nabla}_{\alpha} \mathfrak{G}_{\mu}^{\cdot\nu\alpha} - K_{\alpha\mu\beta} \mathfrak{G}^{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \mathfrak{T} = 0$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\mu\nu} = \frac{a}{2} T_{\alpha\mu\nu} + \frac{b}{2} (T_{\mu\alpha\nu} - T_{\nu\alpha\mu}) + c (g_{\alpha\mu} T_{\nu} - g_{\alpha\nu} T_{\mu}) \quad \text{- суперпотенциал}$$

При $a + b = 2c = 2$ в изотропных координатах решением уравнений движения является метрика

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \left(\frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- метрика Шварцшильда в изотропных координатах

Степени свободы

Канонический формализм!
Сложно...

Рассмотрим уравнения движения в линейном порядке по возмущению тетрады над плоским пространством и над пространством Фридмана-Робертсона-Уокера

$$e^a_{\cdot\mu} = \dot{e}^a_{\cdot\mu} + \delta e^a_{\cdot\mu}$$

Фон: $\dot{e}^a_{\cdot\mu} = \delta^a_{\cdot\mu}$

Возмущение:

$$\delta e^{\emptyset}_0 = \phi, \quad \delta e^{\emptyset}_i = \partial_i \beta + u_i, \quad \delta e^a_0 = \partial_a \zeta + v_a,$$

$$\delta e^a_i = -\psi \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \sigma + \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2} h_{ai}$$

$$\partial_i u_i = \partial_i v_i = \partial_i w_i = 0$$

$$h_{ij} = 0$$

$$\partial_i h_{ij} = 0$$

Фон: $\dot{e}^a_{\cdot\mu} = \alpha(t) \delta^a_{\cdot\mu}$

Возмущение:

$$\delta e^{\emptyset}_0 = \alpha(t) \phi, \quad \delta e^{\emptyset}_i = \alpha(t) (\partial_i \beta + u_i), \quad \delta e^a_0 = \alpha(t) (\partial_a \zeta + v_a)$$

$$\delta e^a_i = \alpha(t) \left[-\psi \delta_{ai} + \partial_{ai}^2 \sigma + \epsilon_{aik} (\partial_k s + w_k) + \partial_i c_a + \frac{1}{2} h_{ai} \right]$$

Поведение степеней свободы

Минковский



Фридман-Робертсон-Уокер

Модель	Изменения
Общая	Нет изменений
$a + b = 2c$	Нет изменений
$a = b$	Калибровочные векторы становятся ограниченными
$a + b = 0$	Калибровочные векторы и скаляры становятся ограниченными
$a + b = 6c$	Почти нет изменений (за исключением ζ при $c_s^2 = \frac{1}{3}$)
$a = b = c$	Нет изменений
$a = b = 3c$	Калибровочные векторы становятся ограниченными
$a = b = 0$	Калибровочные векторы и скаляры становятся ограниченными
$a + b = c = 0$	Нет изменений

Благодарю за внимание!

Модель $a=b$

При $a = b$

$$\begin{cases} \tilde{\square} h_{ij} = 0, & \mathcal{M}'_i + 2H\mathcal{M}_i = 0, \\ (H^2 - H')(\mathcal{M}_i + \mathcal{L}_i) = 0, \\ \Delta\chi_i = -\mathcal{L}'_i - H(3\mathcal{L}_i + \mathcal{M}_i), \\ \phi, \psi, \zeta \text{ удовлетворяют (42)}. \end{cases} \quad (45)$$

Тогда как возмущения над Минковским ведут себя в соответствии

$$\begin{cases} \square h_{ij} = 0, & \mathcal{M}_i = 0, \\ \Delta\chi_i = -\mathcal{L}'_i, \\ \square\zeta = 0, & \phi = -\psi = \left(\frac{c-a}{3c-a}\right)\zeta'. \end{cases} \quad (46)$$

Где видно, что \mathcal{L}_i становится калибровочной при переходе от (45) к (46).